II Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 1

КАВКАЗСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

CAUCASUS MATHEMATIC OLYMPIAD

Д. К. Мамий
Д. А. Белов
В. А. Брагин
Л. А. Емельянов
П. А. Кожевников
С. И. Токарев

13–18 марта 2017 г.
г. Майкоп
Республика Адыгея

1. 8–9 класс

14 марта

1. Вася решал пример на сложение двух дробей $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{c}{d}$, где a, b, c, d — некоторые числа, отличные от 0. Однако он спутал и вместо сложения верно выполнил умножение этих дробей. При этом ответ у Васи совпал с ответом в задачнике. Выясните, чему в таком случае равна сумма дробей $\dfrac{b}{a}$ и $\dfrac{d}{c}$.

Фольклор, обработка Кожевникова П. А.

Ответ. 1. **Решение.** По условию, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$, отсюда $\frac{ad+bc}{bd}=\frac{ac}{bd}$, $ad+bc=ac$. Поделив на ac, получаем $\frac{d}{c}+\frac{b}{a}=1$.

2. В марсианском баскетболе в составе команды ровно шесть игроков. Тренер сборной Марса может собрать состав из любых шести игроков среди 100 кандидатов. При этом некоторые составы тренер считает *сыгранными*, а некоторые — нет (хотя бы один сыгранный состав существует). Назовём пятерку кандидатов *перспективной*, если к ней можно добавить еще одного кандидата и получить сыгранный состав. Назовём кандидата *универсальным*, если он дополняет до сыгранного состава любую перспективную пятерку кандидатов (в которую он сам не входит). Тренер собрал состав из шести универсальных кандидатов. Обязательно ли этот состав является сыгранным?

Брагин В. А.

Ответ. Да, обязательно. **Решение.** Пусть $A=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6\}$ — состав из шести универсальных кандидатов, и пусть $B=\{B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6\}$ — некоторый сыгранный состав кандидатов. Если шестерки A и B совпадают, то все доказано. Иначе в составе B нет какого-то игрока из A, скажем, A_1. Тогда в шестерке B есть игрок, не входящий в шестерку A, пусть для определенности это B_1. Тогда в сыгранном составе $B=\{B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6\}$ поменяем B_1 на A_1. Получим состав $B'=\{A_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6\}$, который тоже сыгранный, поскольку A_1 — универсальный игрок. Если B' и A совпадают, то все доказано, иначе проводим с составом B' аналогичную операцию обмена одного игрока. Не более, чем за шесть таких операций, мы переведем в состав всех игроков из A. Поскольку в процессе операций обмена сыгранность сохраняется, задача решена.

3. Найдите наименьшее натуральное n, для которого верно следующее утверждение: если натуральные числа a и b таковы, что $a+b$ делится на 36, а ab делится на n, то каждое из чисел a и b делится на 36.

Задачный комитет. По мотивам Польских олимпиад

Ответ. $n=216$. **Решение.** Сначала докажем, что при $n=216$ каждое из чисел a и b делится на 36. Число $216=2^3 3^3$, значит, произведение ab делится на 2^3, то есть один из множителей произведения ab делится на 4. Тогда, так как сумма $a+b$ делится на 4, и одно из чисел делится на 4, то и второе из двух чисел делится на 4. Аналогично, одно из чисел произведения ab делится на 9, и так как сумма $a+b$ делится на 9, то и второе из чисел произведения делится на 9. Значит, каждое из чисел a и b делится на 4 и 9, значит и на 36.

Теперь докажем, что меньшие значения n не подходят. Если $n < 216$, то оно не делится или на 8, или на 27.

Первый случай, n не делится на 8. Пусть t — максимальное нечетное число, на которое делится n. Тогда возьмем в качестве a и b числа $2t$ и $34t$. С одной стороны, $a+b=36t$ делится на 36. С другой, $ab=17\cdot 4t$ делится на $4t$, а значит и на n. При этом число a, как и число b, не делится на 4, значит, в данном случае вывод, указанный в условии, сделать нельзя.

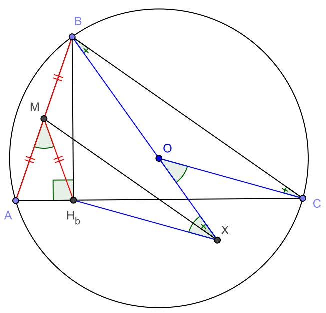

Рис. 1

Второй случай, n не делится на 27. Пусть k — максимальное число, не кратное 3, на которое делится n. Тогда возьмем в качестве a и b числа $3k$ и $33k$. С одной стороны, $a+b=36k$ делится на 36. С другой, $ab=11\cdot 9k$ делится на $9k$, а значит и на n. При этом число a, также как и b, не делится на 9, значит, и в этом случае вывод, указанный в условии, сделать нельзя.

4. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB меньше стороны BC, BH_b — высота, точка O — центр описанной окружности. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO, пересекает прямую BO в точке X. Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

Кожевников П. А.

Решение 1. Пусть M — середина AB (рис. 1). Как известно, $\angle OBC = \angle OCB = 90^\circ - \angle A$. Достаточно понять, что $MX \parallel BC$, или что $\angle MXB = 90^\circ - \angle A$. Заметим, что $\angle H_bXB = \angle XOC = 2\angle OBC = 180^\circ - 2\angle A$. Из $\triangle ABH_b$: $MA = MB = MH_b$ и $\angle BMH_b = \angle MAH_b + \angle MH_bA = 2\angle A$.

В четырехугольнике BMH_bX сумма противоположных углов равна 180°, значит он вписанный. Вписанные углы $\angle BXM$ и $\angle MXH_b$ опираются на равные хорды, следовательно они равны. Отсюда $\angle MXB = \frac{1}{2}\angle BXH_b = 90^\circ - \angle A$, что и требовалось.

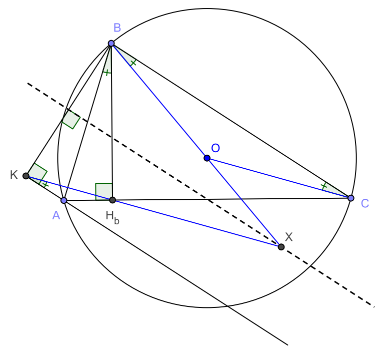

Рис. 2

Решение 2. Пусть K — проекция B на прямую, параллельную BC и проходящую через A (рис. 2). Четырехугольник $BKAH_b$ вписан в окружность с диаметром AB, поэтому $\angle AKH_b = \angle ABH_b = 90^\circ - \angle A = \angle OBC = \angle OCB$.

Это значит, что $KH_b \parallel CO$, тем самым, X — это точка пересечения KH_b и BO. Но прямые KH_b и BO симметричны относительно серединного перпендикуляра m к BK, значит X лежит на m. Остается заметить, что m — это прямая, содержащая среднюю линию, параллельную BC.

2. 10–11 класс

14 марта

1. Точки A и B лежат на разных ветвях гиперболы, заданной уравнением $y = \frac{1}{x}$. Пусть A_x и A_y — проекции точки A на координатные оси, а B_x и B_y — проекции точки B на координатные оси. Докажите, что площади треугольников AB_xB_y и BA_xA_y равны.

Авилов Н. И.

Решение. Пусть $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ — координаты точки A, а $\left(b, \frac{1}{b}\right)$ — координаты точки B. Начало координат обозначим через O. Не умаляя общности, можно считать, что $a < 0$, $b > 0$. Отметим еще точки $C\left(b, \frac{1}{a}\right)$ и $D\left(a, \frac{1}{b}\right)$, так что $ACBD$ — прямоугольник (рис.).

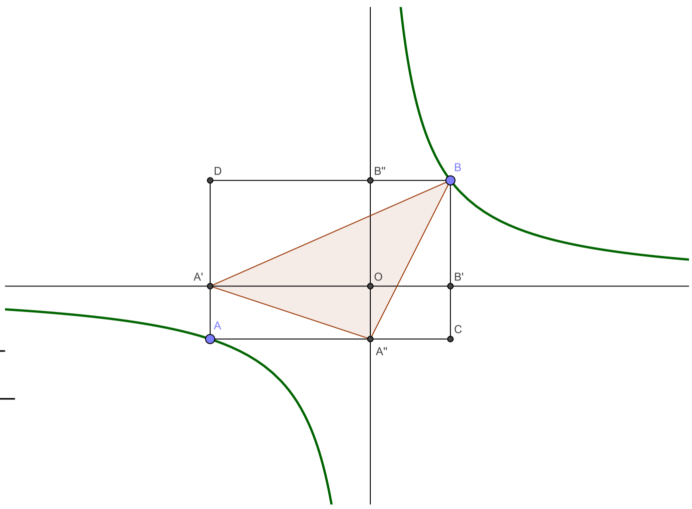

Рис. 3

Тогда $S_{BA_xA_y} = S_{ACBD} - S_{AA_xA_y} - S_{BDA_x} - S_{BCA_y} = S_{ACBD} - \frac{1}{2}S_{AA_xOA_y} - -\frac{1}{2}S_{BDA_xB_x} - \frac{1}{2}S_{BCA_yB_y} = \frac{1}{2}S_{ACBD} - -\frac{1}{2}S_{BB_xOB_y} = \frac{1}{2}S_{ACBD} - \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{b} = = \frac{1}{2}S_{ACBD} - \frac{1}{2}$. Аналогично доказываем, что $S_{AB_xB_y} = \frac{1}{2}S_{ACBD} - \frac{1}{2}$.

Замечание. Утверждение задачи остается в силе, если брать точки и с одной ветви гиперболы.

2. В марсианском баскетболе в составе команды ровно шесть игроков. Тренер сборной Марса может собрать состав из любых шести игроков среди 100 кандидатов. При этом некоторые составы тренер считает *сыгранными*, а некоторые — нет (хотя бы один сыгранный состав существует). Назовём пятерку кандидатов *перспективной*, если к ней можно добавить еще одного кандидата и получить сыгранный состав. Назовём кандидата *универсальным*, если он дополняет до сыгранного состава любую перспективную пятерку кандидатов (в которую он сам не входит). Тренер собрал состав из шести универсальных кандидатов. Обязательно ли этот состав является сыгранным?

Брагин В. А.

Ответ. Да, обязательно. **Решение.** Пусть $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ — состав из шести универсальных кандидатов, и пусть $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$ — некоторый сыгранный состав кандидатов. Если шестерки A и B совпадают, то все доказано. Иначе в составе B нет какого-то игрока из A, скажем, A_1. Тогда в шестерке B есть игрок, не входящий в шестерку A, пусть для определенности это B_1. Тогда в сыгранном составе $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$ поменяем B_1 на A_1. Получим состав $B' = \{A_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$, который тоже сыгранный, поскольку A_1 — универсальный игрок. Если B' и A совпадают, то все доказано, иначе проводим с составом B' аналогичную операцию обмена одного игрока. Не более, чем за шесть таких операций, мы переведем в состав всех игроков из A. Поскольку в процессе операций обмена сыгранность сохраняется, задача решена.

3. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB меньше стороны BC, BH_b — высота, точка O — центр описанной окружности. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO, пересекает прямую BO в точке X. Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

Кожевников П. А.

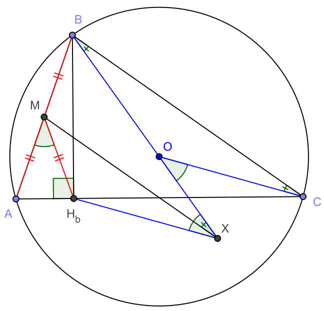

Рис. 4

Решение 1. Пусть M — середина AB (рис. 4). Как известно, $\angle OBC = \angle OCB = 90^\circ - \angle A$. Достаточно понять, что $MX \parallel BC$, или что $\angle MXB = 90^\circ - \angle A$. Заметим, что $\angle H_bXB = \angle XOC = 2\angle OBC = 180^\circ - 2\angle A$. Из $\triangle ABH_b$: $MA = MB = MH_b$ и $\angle BMH_b = \angle MAH_b + \angle MH_bA = 2\angle A$.

В четырехугольнике BMH_bX сумма противоположных углов равна 180°, значит он вписанный. Вписанные углы $\angle BXM$ и $\angle MXH_b$ опираются на равные хорды, следовательно они равны. Отсюда $\angle MXB = \frac{1}{2}\angle BXH_b = 90^\circ - \angle A$, что и требовалось.

Решение 2. Пусть K — проекция B на прямую, параллельную BC и проходящую через A (рис. 5). Четырехугольник $BKAH_b$ вписан в окружность с диаметром AB, поэтому $\angle AKH_b = \angle ABH_b = 90^\circ - \angle A = \angle OBC = \angle OCB$.

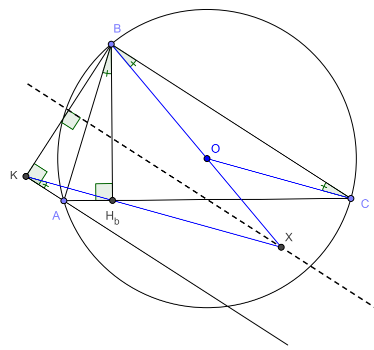

Рис. 5

Это значит, что $KH_b \parallel CO$, тем самым, X — это точка пересечения KH_b и BO. Но прямые KH_b и

BO симметричны относительно серединного перпендикуляра m к BK, значит X лежит на m. Остается заметить, что m — это прямая, содержащая среднюю линию, параллельную BC.

4. Существуют ли такие 101 натуральных чисел, не обязательно различных, произведение которых равно сумме всех их попарных наименьших общих кратных?

Токарев С. И.

Ответ. Существуют. **Решение.** Возьмем 98 чисел равными 1, одно число равным 2, а два других — нечетными взаимно простыми числами (подберем их позже). Тогда среди попарных НОКов будет $49 \cdot 97$ чисел равных 1; 98 чисел равных 2; 98 чисел равных a; 98 чисел равных b; одно число $2a$; одно число $2b$ и одно число ab.

Должно выполняться равенство: $49 \cdot 97 + 98 \cdot 2 + 100a + 100b + ab = 2ab$. Преобразуем это равенство: $(a - 100)(b - 100) = 49 \cdot 97 + 98 \cdot 2 + 100^2$, $(a - 100)(b - 100) = 99 \cdot 151$. Тогда положим $a - 100 = 99$, $b - 100 = 151$, т. е. $a = 199$, $b = 251$. Поскольку 199 и 251 нечетные и взаимно простые, то приведенный пример удовлетворяет условию.

Замечание. Приведенный пример не единственный. Например, условию удовлетворяет набор из 99 единиц и чисел $7 \cdot 33$, $7 \cdot 40$.