IV Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 15–20 марта 2019 года

Юниоры. Первый день

16 марта

1. В детском саду есть большая коробка с шариками трех цветов: красного, синего и зеленого. Всего в коробке 100 шариков. Однажды Паша достал из коробки 30 красных, 10 синих и 20 зеленых шариков, поиграл с ними, пять шариков потерял, а остальные вернул обратно в коробку. На следующий день Саша достал из коробки 8 красных, 18 синих и 48 зеленых шариков. Можно ли хотя бы про один потерянный Пашей шарик определить, какого он был цвета?

2. Существуют ли пять последовательных натуральных чисел, НОК (наименьшее общее кратное) которых является точным квадратом?

3. Точки A' и B' лежат внутри параллелограмма $ABCD$, а точки C' и D' — снаружи него. Известно, что все стороны восьмиугольника $AA'BB'CC'DD'$ равны. Докажите, что точки A', B', C', D' лежат на одной окружности.

4. У Вовы есть квадрат 72×72. К сожалению, n клеток этого квадрата испачканы кофе. Всегда ли Вова может вырезать чистый квадратик 3×3 без центральной клетки, если

(a) $n = 699$;

(b) $n = 750$?

IV Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 15–20 марта 2019 года

Юниоры. Второй день

17 марта

5. У Васи есть числовое выражение

$$\square \cdot \square + \square \cdot \square$$

и 4 карточки с числами, которые можно ставить на 4 свободных места в выражении. Вася пробовал ставить карточки всеми возможными способами и все время получал одно и то же значение выражения. Докажите, что на трех его карточках написаны равные числа.

6. В прямоугольном треугольнике ABC с вершиной прямого угла A проведена биссектриса BL. Точка D симметрична точке A относительно биссектрисы BL. Обозначим через M центр описанной окружности треугольника ADC. Докажите, что прямые CM, DL и AB пересекаются в одной точке.

7. Имеется 15 изначально пустых ящиков. За один ход разрешается выбрать несколько ящиков и добавить в них количества абрикосов, равные некоторым попарно различным степеням двойки. При каком наименьшем натуральном k можно добиться, чтобы после некоторых k ходов во всех ящиках оказалось поровну абрикосов?

8. Существуют ли натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{10} и b_1, b_2, $\ldots$, b_{10}, обладающие следующим свойством: для любого непустого подмножества S множества индексов $\{1, 2, \ldots, 10\}$ сумма всех чисел b_i с индексами из S, увеличенная на 12, делится на сумму всех чисел a_i с индексами из S?

IV Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 15–20 марта 2019 года

Сеньоры. Первый день

16 марта

1. Паша расставил числа от 1 до 100 в клетках квадрата 10×10, каждое по одному разу. После этого Дима рассмотрел всевозможные квадраты площади, большей 1, со сторонами, идущими по линиям сетки, и в каждом покрасил в зелёный цвет наибольшее число (при этом одно число могло быть покрашено несколько раз). Могло ли оказаться, что все двузначные числа покрашены в зелёный цвет?

2. Дан треугольник ABC, I — центр его вписанной окружности. Докажите, что окружность, проходящая через A и касающаяся прямой BI в точке I, и окружность, проходящая через B и касающаяся прямой AI в точке I, пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

3. Найдите все такие натуральные $n \geqslant 2$, что существует перестановка $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$ чисел $1, 2, 3, \ldots, 2n$, для которой верно равенство

$$a_1 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_4 + \ldots + a_{2n-3} \cdot a_{2n-2} = a_{2n-1} \cdot a_{2n}.$$

4. У Димы есть 100 камней, никакие два из которых не равны по массе. Также у него есть странные двухчашечные весы, на каждую чашку которых можно класть ровно 10 камней. Назовем пару камней *ясной*, если Дима может выяснить, какой из камней в этой паре тяжелее. Каково наименьшее возможное количество ясных пар?

IV Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 15–20 марта 2019 года

Сеньоры. Второй день

17 марта

5. Дан треугольник ABC, в котором $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Докажите, что

$$a \sin(\beta - \gamma) + b \sin(\gamma - \alpha) + c \sin(\alpha - \beta) = 0.$$

6. Имеется 15 изначально пустых ящиков. За один ход разрешается выбрать несколько ящиков и добавить в них количества абрикосов, равные некоторым попарно различным степеням двойки. При каком наименьшем натуральном k можно добиться, чтобы после некоторых k ходов во всех ящиках оказалось поровну абрикосов?

7. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC выбраны соответственно точки K, L, M, а внутри треугольника — точка P так, что $PL \parallel BC$, $PM \parallel CA$, $PK \parallel AB$. Может ли оказаться, что все три трапеции $AMPL$, $BKPM$, $CLPK$ — описанные?

8. Существуют ли попарно различные натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{101} и b_1, b_2, $\ldots$, b_{101}, обладающие следующим свойством: для любого непустого подмножества S множества индексов $\{1, 2, \ldots, 101\}$ сумма всех чисел b_i с индексами из S, увеличенная на $100!$, делится на сумму всех чисел a_i с индексами из S?