IV Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 1

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Д. К. Мамий
П. А. Кожевников
В. А. Брагин
Д. А. Белов
Е. В. Бакаев
Л. А. Емельянов
А. А. Полянский
М. Сагафиян

15–20 марта 2019 г.
г. Майкоп
Республика Адыгея

1. Юниоры

16 марта

1. В детском саду есть большая коробка с шариками трех цветов: красного, синего и зеленого. Всего в коробке 100 шариков. Однажды Паша достал из коробки 30 красных, 10 синих и 20 зеленых шариков, поиграл с ними, пять шариков потерял, а остальные вернул обратно в коробку. На следующий день Саша достал из коробки 8 красных, 18 синих и 48 зеленых шариков. Можно ли хотя бы про один потерянный Пашей шарик определить, какого он был цвета?

Белов Д. А.

Ответ. Да, можно: хотя бы один потерянный шарик красный. **Решение.** То, что Саша вытащил 18 синих и 48 зеленых шариков означает, что в коробке осталось хотя бы 66 не красных шариков. Если красные шарики не потеряны, то их осталось хотя бы 30, значит, в сумме в коробке осталось хотя бы $66 + 30 = 96$ шариков, что неверно. Значит, Паша потерял хотя бы один красный шарик.

2. Существуют ли пять последовательных натуральных чисел, НОК (наименьшее общее кратное) которых является точным квадратом?

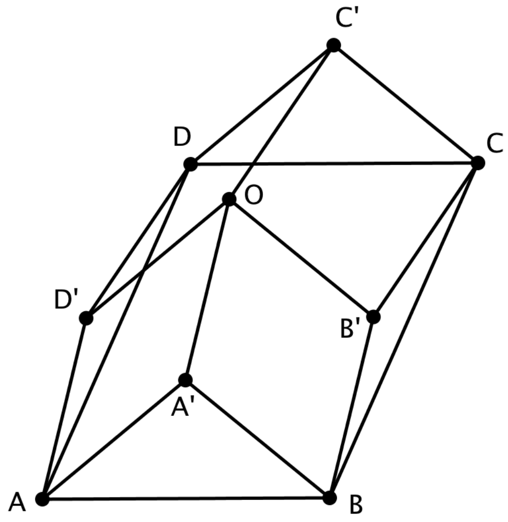
Кожевников П. А.

Ответ. Нет, не существуют. **Решение.** Предположим противное, то есть, что $N = \text{НОК}(n, n+1, n+2, n+3, n+4)$ является точным квадратом. Тогда каждое простое число входит в разложение N в четной степени. Каждое простое $p \geqslant 5$ является делителем не более чем одного из чисел $n, n+1, n+2, n+3, n+4$. Значит, если $p \geqslant 5$ является делителем одного из данных чисел, то входит в разложение на простые множители в четной степени. Число $p = 2$ входит в разложение не более чем трех из данных чисел, причем в разложение хотя бы одного из них — в четной степени, значит, $p = 2$ присутствует в нечетной степени в разложении не более чем двух из данных чисел. Аналогично, $p = 3$ присутствует в нечетной степени в разложении не более чем одного из данных чисел. Таким образом, среди данных пяти чисел не менее двух чисел имеют в своем разложении только четные степени простых чисел, т.е. являются точными квадратами.

Пусть эти точные квадраты — $x^2 < y^2$. Тогда $4 \geqslant y^2 - x^2 \geqslant (y-x)(y+x)$, что возможно только при $x = 1$, $y = 2$. Значит, единственный оставшийся вариант: $\text{НОК}(1, 2, 3, 4, 5) = 60$ — не точный квадрат.

3. Точки A' и B' лежат внутри параллелограмма $ABCD$, а точки C' и D' — снаружи него. Известно, что все стороны восьмиугольника $AA'BB'CC'DD'$ равны. Докажите, что точки A', B', C', D' лежат на одной окружности.

Бакаев Е.В.



Решение. Обозначим через a длину стороны нашего восьмиугольника. Заметим, что треугольник $AD'D$ равен треугольнику $BB'C$ (получается из него сдвигом на вектор $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$). Отсюда $ABB'D'$ — параллелограмм. Аналогично, треугольник $DC'C$ получается из треугольника $AA'B$ сдвигом на вектор $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Отсюда $BA'C'C$ — параллелограмм.

Построим точку O такую, что $A'BB'O$ — ромб, так что $OA' = OB' = a$. Поскольку $BB' = A'O = AD'$ и $BB' \parallel A'O \parallel AD'$, $AA'OD'$ — параллелограмм, поэтому $OD' = A'A = a$. Аналогично показываем, что $OC' = a$. Таким образом, точка O удалена на расстояние a от каждое из точек A', B', C', D'.

4. У Вовы есть квадрат 72×72. К сожалению, n клеток этого квадрата испачканы кофе. Всегда ли Вова может вырезать чистый квадратик 3×3 без центральной клетки, если

(a) $n = 699$;

(b) $n = 750$?

Белов Д. А.

(a) Ответ. Да, всегда. **Решение.** Квадрат 3×3 однозначно задается центральной клеткой. Эту центральную клетку мы можем выбрать из внутреннего квадрата 70×70, то есть $70 \cdot 70 = 4900$ способами. Поэтому и квадратиков 3×3 без центральной клетки столько же. Докажем, что не все они испачканы кофе.

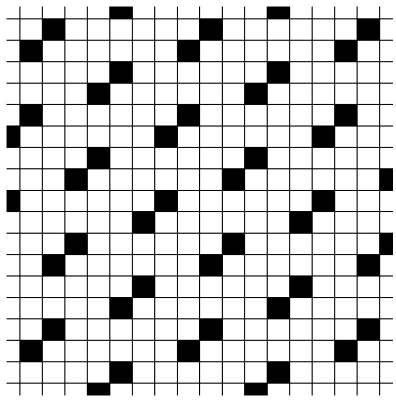
Предположим противное. Будем говорить, что испачканная клетка *запрещает* квадратик 3×3 без центральной клетки, если эта испачканная клетка является одной из 8 клеток этого квадрата.

Разобьем все испачканные клетки на группы, объединяя в одну группу испачканные клетки, между которыми существует путь по испачканным клеткам с переходами к соседним по стороне или по диагонали клеткам. Рассмотрим одну группу S. Заметим, что если в S всего одна клетка c, то эта клетка c обязательно прилегает к границе квадрат 72×72, иначе можно было бы вырезать квадратик 3×3 без центральной клетки c. В таком случае единственная клетка группы S запрещает не более трех квадратиков 3×3 без центральной клетки.

Теперь рассмотрим группу испачканных клеток T, в которой более одной клетки. Выберем одну из клеток этой группы a. Выберем также соседнюю по стороне или диагонали с a испачканную клетку b. Вместе клетки a и b запрещают не более 14 квадратиков 3×3. Будем добавлять клетки группы T к уже выбранным по одной, каждый раз добавляя клетку, являющуюся соседней с одной из уже выбранных. Тогда каждая добавляемая клетка запрещает не более 6 новых квадратиков 3×3, которых мы еще не посчитали ранее как запрещенных группой клеток T. Поэтому, если в группе T всего k клеток, то количество квадратиков 3×3, которые они запрещают, не превосходит $7k$.

Таким образом, 699 клеток в сумме запрещают не более $699 \cdot 7 = 4893$ квадратиков 3×3 без центральной клетки, а их 4900. Значит, найдется чистый квадратик 3×3 без центральной клетки, который и сможет вырезать Вова.

(b) Ответ. Нет, не всегда. **Решение.** Раскрасим плоскость так, как показано на рисунке. Пусть черным цветом отмечены испачканные кофе клетки. Заметим, что из такой плоскости вырезать квадратик 3×3 без центральной клетки нельзя.



Поместим квадрат 72×72 на эту плоскость так, чтобы его нижний левый угловой квадрат 2×2 не содержал черных клеток. Покажем, что черных клеток в квадрате будет не более 750, тогда этот пример будет подходить под условия задачи, и из него Вова вырезать квадратик 3×3 без центральной клетки не сможет.

Выделим в квадрате первые два столбца. Разобьем их на нижний квадрат 2×2, в котором нет черных клеток, и 10 вертикальных полосок 1×14, в каждой из которых по 2 черные клетки. В сумме получается 20 клеток. Остальную часть доски разобьем на горизонтальные полоски 7×1. Их будет $72 \cdot 10 = 720$ штук, и в каждой полоске ровно одна черная клетка. Значит, черных клеток в квадрате 72×72 ровно 740, что меньше 750, и пример подходит.

2. Сеньоры *16 марта*

1. Паша расставил числа от 1 до 100 в клетках квадрата 10×10, каждое по одному разу. После этого Дима рассмотрел всевозможные квадраты площади, большей 1, со сторонами, идущими по линиям сетки, и в каждом покрасил в зелёный цвет наибольшее число (при этом одно число могло быть покрашено несколько раз). Могло ли оказаться, что все двузначные числа покрашены в зелёный цвет?

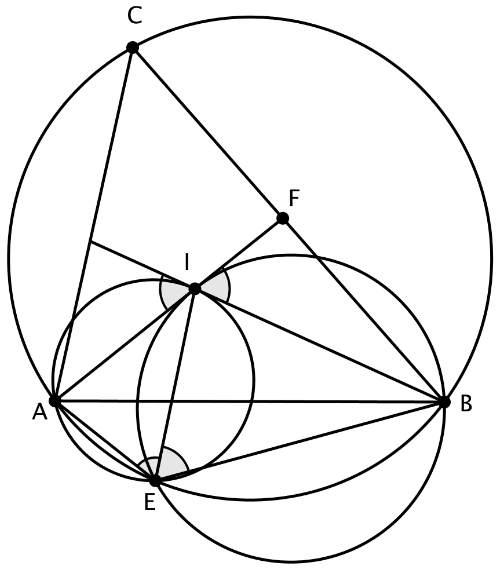
Брагин В. А.

Ответ. Нет, не могло. **Решение.** Рассмотрим клетку с зелёным числом n и соответствующий ему квадрат, в котором это зелёное число наибольшее. Заметим, что можно расположить квадрат 2×2 внутри этого квадрата, содержащий эту клетку. В расположенном квадрате 2×2 число n тоже наибольшее. То есть каждое зелёное число является наибольшим в каком-то квадрате 2×2. Но квадратов 2×2 всего 81 (левый нижний угол квадрата 2×2 однозначно определяет положение, и этот угол в свою очередь не может примыкать к верхней или правой стороне квадрата 10×10), а двузначных чисел — 90, поэтому всем двузначным числам квадратов 2×2 не хватит, значит, все они не могут быть зелёными.

2. Дан треугольник ABC, I — центр его вписанной окружности. Докажите, что окружность, проходящая через A и касающаяся прямой BI в точке I, и окружность, проходящая через B и касающаяся прямой AI в точке I, пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

Емельянов Л. А.

Решение. Пусть данные окружности (т. е. окружность, проходящая через A и касающаяся BI в точке I, и окружность, проходящая через B и касающаяся AI в точке I) пересекаются вторично в точке E. Из условия касания $\angle BEI = \angle BIF$ (где F — на продолжении AI за I), откуда $\angle BEI = \angle BAI + \angle ABI = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$. Аналогично доказываем, что $\angle AEI = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$. Следовательно, $\angle AEB = \angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$. Это означает, что четырехугольник $ACBE$ — вписанный.



3. Найдите все такие натуральные $n \geqslant 2$, что существует перестановка $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$ чисел $1, 2, 3, \ldots, 2n$, для которой верно равенство

$$a_1 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_4 + \ldots + a_{2n-3} \cdot a_{2n-2} = a_{2n-1} \cdot a_{2n}.$$

Сагафиян М.

Ответ. $n = 3, 4, 5, 6, 7$. **Решение.** Заметим, что наибольшее значение правой части $2n(2n-1)$. Найдём наименьшее значение левой части.

Утверждение. Наименьшее значение левой части равно

$$1 \cdot (2n-2) + 2 \cdot (2n-3) + \ldots + (n-1) \cdot n.$$

Докажем это утверждение, а сначала покажем, как, пользуясь им, решить задачу.

Выражение выше можно преобразовать как

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(2n-1-i) = (2n-1)\sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 =$$
$$(2n-1)\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{3}.$$

Поэтому должно быть выполнено неравенство

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{3} \leqslant 2n(2n-1).$$

Это равносильно $n-1 \leqslant 6$, или $n \leqslant 7$.

Осталось привести примеры для $n = 3, 4, 5, 6, 7$. Для $n = 7$ пример очевидно следует из прошлой части решения:

$$1 \cdot 12 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 7 = 13 \cdot 14.$$

Для $n = 3$: $1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 4 \cdot 5$.
Для $n = 4$: $8 \cdot 5 = 7 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 3$.
Для $n = 5$: $8 \cdot 9 = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5$.
Для $n = 6$: $12 \cdot 10 = 11 \cdot 1 + 9 \cdot 5 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 6 \cdot 2$.

Доказательство утверждения. Докажем индукцией по n, что если есть $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n}$, то наименьшая сумма произведений по парам — это $a_1a_{2n} + a_2a_{2n-1} + \ldots + a_na_{n+1}$.

База $n = 2$. Надо доказать, что если a — наименьшее из четырёх чисел, а d — наибольшее, то $ad+bc < ab+cd$. Перенесём, получим $a(d-b) < c(d-b)$, что верно, так как $a < c$ и $d - b > 0$. Переход $n-1 \to n$. Рассмотрим способ разбиения $2n$ чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n}$ на пары с наименьшей суммой произведений. Из базы следует, что a_1 должно быть в паре с a_{2n}, иначе если они в парах с другими, то можно поменять и уменьшить сумму. По предположению индукции для $a_2 < a_3 \ldots < a_{2n-1}$ наименьшая сумма произведений в парах — это $a_2a_{2n-1} + a_3a_{2n-2} + \ldots + a_na_{n+1}$. Это завершает переход.

4. У Димы есть 100 камней, никакие два из которых не равны по массе. Также у него есть странные двухчашечные весы, на каждую чашку которых можно класть ровно 10 камней. Назовем пару камней *ясной*, если Дима может выяснить, какой из камней в этой паре тяжелее. Каково наименьшее возможное количество ясных пар?

Брагин В. А.

Ответ. $C_{100}^2 - C_{19}^2 = 4779$. **Решение.** Назовём пару *плохой*, если она не является ясной.

Пример. Покажем, что возможна такая ситуация, когда будут 19 камней, любые два из которых являются плохой парой, то есть ни про какие два из них нельзя выяснить, кто из них легче.

Положим массы камней равными 100, 200, 400, 800, $\ldots$, $2^{80}\cdot 100$, $2^{100}+1$, $2^{100}+2$, $\ldots$, $2^{100}+19$. Камни с массой больше 2^{100}, назовём *тяжёлыми*, а остальные — *лёгкими* . Докажем, что тяжёлые камни невозможно различить, даже если мы сравнили все возможные пары десяток друг с другом. Это следует из следующих двух утверждений.

Утверждение 1. При сравнении двух групп по 10 камней тяжелее будет та, на которой больше тяжёлых камней.

Утверждение 2. При равном количестве тяжёлых камней в двух группах тяжелее будет группа, в которой самый тяжёлый из присутствующих лёгких камней.

Оценка. Докажем, что больше 171 плохих пар быть не может. Для этого сформулируем еще пару утверждений.

Утверждение 3. Пара камней является плохой тогда и только тогда, когда для любого возможного взвешивания при замене камней из этой пары друг на друга исход взвешивания не меняется.

Доказательство этого утверждения смотрите ниже.

Утверждение 4. Если пары XY и XZ плохие, то пара YZ плохая.

Доказательство. Рассмотрим любое взвешивание. Поменяем в нём местами Y и X, потом поменяем X и Z, а затем снова X и Y. После каждой из этих замен, в силу утверждения 3, результат взвешивания не менялся. А итог этих замен в том, что X остался на своём месте, а Y и Z поменялись местами. Действительно. $XYZ \to YXZ \to YZX \to XZY$.
Получается, что в произвольном взвешивании при смене Z и Y результат не меняется, значит, пара YZ плохая.

Рассмотрим граф, вершины которого — камни, рёбрами соединим плохие пары. Из утверждения 4 следует, что каждая компоненты связности такого графа — полный подграф.

Утверждение 5. Для любых 20 камней $A_1, A_2, \ldots A_{20}$ среди пар A_1A_2, $A_3A_4 \ldots A_{19}A_{20}$ есть хоть одна бы одна ясная.

Доказательство. Сделаем взвешивание $A_1, A_3, A_5 \ldots A_{19}$ с $A_2, A_4, \ldots A_{20}$. Если весы показали равновесие, то после замены любой пары равновесие нарушится и удастся выяснить, кто в этой паре легче, а кто тяжелее. Если одна чашка перевесила другую, то будем по очереди менять камни из одной пары, после всех десяти таких замен результат взвешивания изменится на противоположный. Значит, результат изменится после замены одной пары, эта пара и будет ясной.

Рассмотрим теперь компоненты связности графа плохих пар. В каждой из них выделим наибольшее паросочетание (то есть множество непересекающихся пар). Пусть в i-ой компоненте удалось выделить n_i пар. Согласно утверждению 5, сумма всех n_i не превосходит 9. Тогда в i-ой компоненте не более $2n_i+1$ вершин, и стало быть не более $n_i(2n_i+1)$ рёбер. Тогда

$$\sum n_i(2n_i+1) = 2\sum n_i^2 + \sum n_i \leqslant 2(\sum n_i)^2 + \sum n_i \leqslant 2\cdot 9^2 + 9 = 171.$$

Доказательство утверждения 3. Достаточность очевидна. Докажем теперь, что если при какой-то замене двух камней друг на друга исход взвешивания меняется, то мы можем выяснить про эти два камня, какой тяжелее.

Во время взвешивания каждый камень мог находиться на левой чашке, правой или не участвовать во взвешивании. Если оба камня находились в одной группе, то результат взвешивания не изменился. Если камни были на разных чашках, то поскольку результаты взвешиваний изменились, возможны варианты:

$>, =$ В этом случае камень на левой чашке тяжелее.

$>, <$ В этом случае камень с левой чашки тяжелее.

$=, >$ В этом случае камень с правой чашки тяжелее.

$=, <$ В этом случае камень с левой чашки тяжелее.

$<, =$ В этом случае камень с правой чашки тяжелее.

$<, >$ В этом случае камень с правой чашки тяжелее.

Если же один из камней не участвовал, то при замене масса одной из чашек вообще не меняется и легко установить, увеличилась или уменьшилась масса другой чашки после замены камня.