IV Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 2

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Д. К. Мамий
П. А. Кожевников
В. А. Брагин
Д. А. Белов
Е. В. Бакаев
Л. А. Емельянов
А. А. Полянский
М. Сагафиян

15–20 марта 2019 г.
г. Майкоп
Республика Адыгея

1. Юниоры

17 марта

5. У Васи есть числовое выражение

$$\square \cdot \square + \square \cdot \square$$

и 4 карточки с числами, которые можно ставить на 4 свободных места в выражении. Вася пробовал ставить карточки всеми возможными способами и все время получал одно и то же значение выражения. Докажите, что на трех его карточках написаны равные числа.

Кожевников П. А.

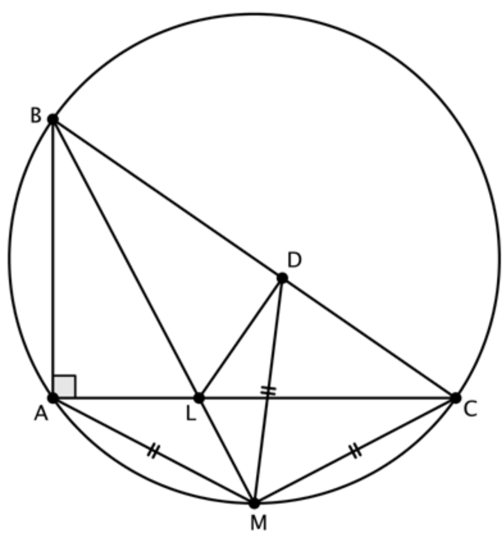
Решение. Пусть числа на карточках равны a, b, c, d. Тогда $ab+cd = ac+bd$, откуда $(ab - ac) + (cd - bd) = 0$, $a(b - c) - d(b - c) = 0$, $(a - d)(b - c) = 0$. Значит, $a = d$ или $b = c$. Для определенности, пусть $a = d$.

Аналогично из равенства $ad + bc = ac + bd$ выводим, что $a = b$ или $c = d$. В первом случае $a = b = d$, а во втором случае $a = c = d$.

6. В прямоугольном треугольнике ABC с вершиной прямого угла A проведена биссектриса BL. Точка D симметрична точке A относительно биссектрисы BL. Обозначим через M центр описанной окружности треугольника ADC. Докажите, что прямые CM, DL и AB пересекаются в одной точке.

Белов Д. А.

Решение 1. Рассмотрим точку M' — середину меньшей дуги AC. Она равноудалена от точек A и C и лежит на биссектрисе BL. Поэтому $M'A = M'D$, значит, эта точка является центром описанной окружности треугольника ADC, то есть совпадает с M. Кроме того, $\angle BMC = 90°$, как опирающийся на диаметр BC описанной окружности треугольника ABC.



Рассмотрим осевую симметрию относительно BM. Прямая CM остается на месте, так как $CM \perp BM$. Прямая DL переходит в AL, а прямая AB — в прямую BC. Три прямые CM, AL и BC пересекаются в одной точке C. Значит, их прообразы также пересекались в одной точке, что и требовалось доказать.

Решение 2. Пусть E — точка, симметричная C относительно BL. Из симметрии имеем: D лежит на BC, E — на AB и на DL, а $\angle BDE = 90°$. Пусть CE пересекает BL в точке M'. Тогда M' — середина CE, т. е. середина гипотенуз прямоугольных треугольников EAC и EDC. Тогда $M'E = M'A = M'D =$

$= M'C$, значит M' — центр окружности (ADC), т. е. $M' = M$. Таким образом, CM, DL и AB пересекаются в точке E.

7. Имеется 15 изначально пустых ящиков. За один ход разрешается выбрать несколько ящиков и добавить в них количества абрикосов, равные некоторым попарно различным степеням двойки. При каком наименьшем натуральном k можно добиться, чтобы после некоторых k ходов во всех ящиках оказалось поровну абрикосов?

Кожевников П. А.

Ответ. 8. **Решение.** *Пример.* Множество ящиков разобьем на подмножество A из 7 ящиков и подмножество B из 8 ящиков. За каждый из 8 ходов положим по $2^7 = 128$ абрикосов в один из ящиков множества B (за разные ходы — в разные ящики), а в остальные ящики множества B ничего не кладем. А в ящики множества A абрикосы раскладываем согласно таблице:

	1 ящик	2 ящик	3 ящик	4 ящик	5 ящик	6 ящик	7 ящик
1 ход	1	2	4	8	16	32	64
2 ход	1	2	4	8	16	32	64
3 ход	2	4	8	16	32	64	-
4 ход	4	8	16	32	64	-	-
5 ход	8	16	32	64	-	-	-
6 ход	16	32	64	-	-	-	-
7 ход	32	64	-	-	-	-	-
8 ход	64	-	-	-	-	-	-

Легко видеть, что в конечном итоге в каждом ящике будет 2^7 абрикосов.

Оценка. Пусть за k ходов количества абрикосов во всех ящиках стали равны N. Обозначим через 2^m наибольшее количество абрикосов, которое положили в какой-либо ящик на каком-либо ходу. Тогда $N \geqslant 2^m$. С другой стороны, за каждый ход во все ящики положили не более $2^m + 2^{m-1} + \ldots + 2^2 + 2 + 1 < 2^{m+1}$ абрикосов, поэтому в конечном итоге общее количество абрикосов, равное $15N$, меньше $2^{m+1} \cdot k$. Имеем $15 \cdot 2^m < 2^{m+1} \cdot k$, откуда $k > 7{,}5$.

8. Существуют ли натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ и $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$, обладающие следующим свойством: для любого непустого подмножества S множества индексов $\{1, 2, \ldots, 10\}$ сумма всех чисел b_i с индексами из S, увеличенная на 12, делится на сумму всех чисел a_i с индексами из S?

Сагафиян М., Брагин В. А.

Ответ. Нет, не существуют. **Решение.** Докажем для начала *лемму*: среди пяти чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 найдутся несколько, сумма которых делится на 5. В самом деле, рассмотрим частичные суммы a_1, $a_1 + a_2$, $\ldots$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

Если все эти суммы дают разные остатки при делении на 5, то найдется сумма, дающая остаток 0, и лемма доказана. В противном случае рассмотрим две суммы, дающие одинаковые остатки, и вычтем из суммы с большим числом слагаемых вторую. Получим сумму нескольких чисел a_i, дающую остаток 0 при делении на 5, что завершает доказательство леммы.

Теперь вернемся к решению задачи. Предположим противное, то есть что указанные в условии числа нашлись. Выберем по лемме среди чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 несколько, дающие сумму, делящуюся на 5. Обозначим набор этих a_i через X. Тогда сумма соответствующих чисел b_i, увеличенная на 12, также делится на 5. Обозначим сумму этих b_i через n, тогда $n + 12$ делится на 5.

Точно также выберем по лемме несколько чисел среди a_6, a_7, a_8, a_9 и a_{10}, сумма которых делится на 5. Обозначим набор этих a_j через Y. Опять же сумма соответствующих b_j, увеличенная на 12, делится на 5. Обозначим сумму b_j через k, тогда $k + 12$ делится на 5.

Теперь применим условие для объединения двух непересекающихся множеств X и Y. Во-первых, сумма a_i из этих двух множеств делится на 5. Во-вторых, $n + 12 + k + 12$ делится на 5. Но с другой стороны, применяя условие, сумма $n+k+12$ должна делиться на 5. А две суммы, отличающиеся на 12, не могут обе одновременно делиться на 5, противоречие.

2. Сеньоры *17 марта*

5. Дан треугольник ABC, в котором $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Докажите, что

$$a\sin(\beta-\gamma) + b\sin(\gamma-\alpha) + c\sin(\alpha-\beta) = 0.$$

Бакаев Е. В.

Решение. С учетом $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, где R — радиус описанной окружности, имеем:

$$2Ra\sin(\beta-\gamma) = 2Ra\sin\beta\cos\gamma - 2Ra\sin\gamma\cos\beta = ab\cos\gamma - ac\cos\beta.$$

Используя аналогичные равенства, получаем:

$$\begin{gathered}2R(a\sin(\beta-\gamma) + b\sin(\gamma-\alpha) + c\sin(\alpha-\beta)) = \\ = (ab\cos\gamma - ac\cos\beta) + (bc\cos\alpha - ba\cos\gamma) + (ca\cos\beta - cb\cos\alpha) = 0.\end{gathered}$$

6. Имеется 15 изначально пустых ящиков. За один ход разрешается выбрать несколько ящиков и добавить в них количества абрикосов, равные некоторым попарно различным степеням двойки. При каком наименьшем натуральном k можно добиться, чтобы после некоторых k ходов во всех ящиках оказалось поровну абрикосов?

Кожевников П. А.

Ответ. 8. **Решение.** *Пример.* Множество ящиков разобьем на подмножество A из 7 ящиков и подмножество B из 8 ящиков. За каждый из 8 ходов положим по $2^7 = 128$ абрикосов в один из ящиков множества B (за разные ходы — в разные ящики), а в остальные ящики множества B ничего не кладем. А в ящики множества A абрикосы раскладываем согласно таблице:

	1 ящик	2 ящик	3 ящик	4 ящик	5 ящик	6 ящик	7 ящик
1 ход	1	2	4	8	16	32	64
2 ход	1	2	4	8	16	32	64
3 ход	2	4	8	16	32	64	-
4 ход	4	8	16	32	64	-	-
5 ход	8	16	32	64	-	-	-
6 ход	16	32	64	-	-	-	-
7 ход	32	64	-	-	-	-	-
8 ход	64	-	-	-	-	-	-

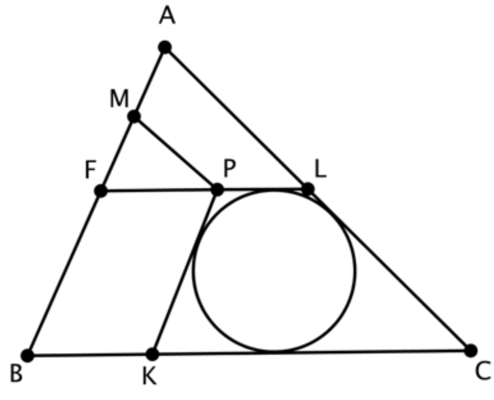
Легко видеть, что в конечном итоге в каждом ящике будет 2^7 абрикосов.

Оценка. Пусть за k ходов количества абрикосов во всех ящиках стали равны N. Обозначим через 2^m наибольшее количество абрикосов, которое положили в какой-либо ящик на каком-либо ходу. Тогда $N \geqslant 2^m$. С другой стороны, за каждый ход во все ящики положили не более $2^m+2^{m-1}+\ldots+2^2+2+1 < 2^{m+1}$ абрикосов, поэтому в конечном итоге общее количество абрикосов, равное $15N$, меньше $2^{m+1} \cdot k$. Имеем $15 \cdot 2^m < 2^{m+1} \cdot k$, откуда $k > 7{,}5$.

7. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC выбраны соответственно точки K, L, M, а внутри треугольника — точка P так, что $PL \parallel BC$, $PM \parallel CA$, $PK \parallel AB$. Может ли оказаться, что все три трапеции $AMPL$, $BKPM$, $CLPK$ — описанные?

Кожевников П. А.

Ответ. Нет, не может. **Решение 1.** Предположим, что это возможно. Обозначим вписанные окружности соответственно через ω_a, ω_b, ω_c, а их радиусы — через r_a, r_b, r_c. В силу циклической симметрии условия можем считать, что r_c — наибольший из радиусов. Продлим PL до пересечения с AB в точке F. Заметим, что $2r_c$ равно расстоянию между прямыми LF и BC, т. е. высоте трапеции



$BFLC$. Тогда $2r_b$ не больше этой высоты, значит окружность ω_b целиком содержится внутри трапеции $BFLC$, и не может касаться отрезка MP. Противоречие.

Решение 2. Используем обозначения $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$

Предположим, это возможно. Запишем условия описанности:

$$AL + PM = AM + PL,$$

$$BM + PK = BK + PM,$$

$$CK + PL = CL + PK.$$

Складывая эти неравенства, получаем:

$$AL + BM + CK = AM + BK + CL. \tag{1}$$

Положим $x = CL/b = S_{PBC}/S_{ABC}$. Аналогично, кладем $y = AM/c = S_{PCA}/S_{ABC}$, $z = BK/a = S_{PAB}/S_{ABC}$, так что $x + y + z = 1$. Равенство (1) переписывается в виде:

$(x+z)c+(y+x)a+(z+y)b = yc+za+xb$, и далее $x(c+a-b)+y(a+b-c)+ z(b + c - a) = 0$, что невозможно, так как величины $c + a - b$, $a + b - c$, $b + c - a$ положительны в силу неравенства треугольника.

8. Существуют ли попарно различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$ и $b_1, b_2, \ldots, b_{101}$, обладающие следующим свойством: для любого непустого подмножества S множества индексов $\{1, 2, \ldots, 101\}$ сумма всех чисел b_i с индексами из S, увеличенная на $100!$, делится на сумму всех чисел a_i с индексами из S?

Сагафиян М., Брагин В. А.

Ответ. Существуют. **Решение.** Обозначим через $\nu_p(m)$ степень вхождения простого числа p в разложении числа m на простые множители. Будем последовательно подбирать a_i и b_i, чтобы, вдобавок к условию задачи, были выполнены условия:

1)$a_i \equiv 1 \pmod{q^{\nu_q(100!)+1}}$ для $q < p$.

2) $a_i \equiv 1 \pmod{q^2}$ для всех простых $q < 2^{101}$.

3) Для всех простых $q > 2^{101}$ не более одного подмножества a_i имеет сумму, кратную q.

4) b_i делится на $(p-1)!$

5) Все $\sum\limits_{i \in I} a_i$ различны.

База индукции. Выберем $a_1 = 1$, $b_1 = 100!$. *Переход.* Предположим, мы смогли подобрать $a_1, a_2 \ldots a_k$ и $b_1, b_2, \ldots b_k$. Научимся подбирать a_{k+1} и b_{k+1}.

Найдём простые числа $q_1, q_2 \ldots q_l$, большие 2^{101}, являющиеся делителями каких-то сумм нескольких из чисел $a_1, a_2 \ldots a_k$. Ещё надо обеспечить, чтобы какое-то новое простое, большее 2^{101} не оказалось делителем у двух сумм с участием a_{k+1}. Если $S_1 + a_{k+1}$ и $S_2 + a_{k+1}$ делятся на простое $q > 2^{101}$, то получается, то $S_1 \equiv S_2 \pmod q$. Поэтому к списку $q_1, q_2 \dots q_l$ добавим те простые, по модулю которых могут быть сравнимы суммы каких-то из $a_1, a_2 \dots a_k$. Поскольку любые две суммы различных подмножеств не совпадают, то добавится конечное число простых.

Докажем, что для a_{k+1} можно подобрать такой остаток r_i при делении на каждое q_i, чтобы никакая сумма с участием a_{k+1} не делилась на q_i. Поскольку сумм чисел из $a_1, \dots, a_k$ всего $2^k < 2^{100} < q_i$, то есть такой остаток t_i, который у этих сумм не встречается. Теперь надо обеспечить, чтобы какое-то новое простое, большее 2^p не оказалось делителем у двух сумм с участием a_{k+1}. Если $S_1 + a_{k+1}$ и $S_2 + a_{k+1}$ делятся на простое $q > 2^{101}$, то получается, то $S_1 \equiv S_2 \pmod q$. Поэтому к списку $q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_l$ добавим те простые, по модулю которых могут быть сравнимы суммы каких-то из $a_1, a_2 \dots a_k$ Выберем $r_i = q_i - t_i$. Найдём a_{k+1} как решение системы сравнений

$$\begin{cases} a_{k+1} & \equiv 1 \pmod{q^{\nu_q((p-1)!)+1}}, \text{ для } q < 101 \\ a_{k+1} & \equiv 1 \pmod q, \text{ для всех простых } q < 2^{101} \\ a_{k+1} & \equiv r_i \pmod{q_i}, \text{ для всех } q_i\text{,выбранных ранее.} \end{cases}$$

У этой системы есть решение по китайской теореме об остатках.

Подберём теперь b_{k+1}, кратное $100!$. Мы снова будем использовать китайскую теорему об остатках.

Наша цель сделать так, чтобы для любого простого q и любого множества $I \subset \{1, 2, \dots k+1\}$, содержащего $k+1$ было выполнено

$$\nu_q(100! + \sum_{i \in I} b_i) \geqslant \nu_q(\sum_{i \in I} a_i).$$

Если $q < 101$, то $100! + \sum\limits_{i \in I} b_i$ делится на $100!$ то есть на $q^{\nu_q(100!)}$, а $\sum\limits_{i \in I} a_i \equiv |I| \pmod{q^{\nu_q(100!)+1}}$, поэтому на эту степень q не делится, поэтому неравенство выполнено автоматически.

Если $q = 101$, и $|I| < 101$, то $\sum\limits_{i \in I} a_i \equiv |I| \pmod{101}$ то есть не делится на 101, если же I содержит все числа от 1 до 101, то $\sum\limits_{i \in I} a_i \equiv 101 \pmod{101^2}$ и потребуем от b_{101} давать остаток $-100! - b_1 - b_2 - \dots - b_{100}$ при делении на 101.

Если $101 < q < 2^{101}$, то $\sum\limits_{i \in I} a_i \equiv |I| \pmod q$, то есть вообще не делится на q.

Если $q > 2^{101}$, то только максимум для какого-то одного I $\sum\limits_{i \in I} a_i \equiv 0 \pmod q$ и мы можем потребовать от b_k давать остаток $-100! - \sum\limits_{i \in I \setminus \{k+1\}} b_i$ при делении на необходимую степень q. При этом таких чисел q, для которых это требование появится, лишь конечное число.

Итого получена конечная система сравнений для b_{k+1} по модулям степеней различных простых. Кроме того, поскольку решений бесконечно много, то можно выбрать a_{k+1} больше суммы всех предыдущих a_i, чтобы суммы подмножеств a_i оставались различными.