V Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 1

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Д. К. Мамий
П. А. Кожевников
Д. А. Белов
В. А. Брагин
Е. В. Бакаев
Л. А. Емельянов
Ч. Лейтем
В. В. Новиков
М. Сагафиян
А. А. Полянский

13–18 марта 2020 г.
г. Майкоп
Республика Адыгея

1. Юниоры

14 Марта

1. Использовав один волшебный орех, Баба Яга может превратить блоху в жука или паука в клопа. Использовав один волшебный желудь, может превратить блоху в паука или жука в клопа. За вечер Баба Яга потратила 20 волшебных орехов и 23 волшебных желудя. За счет этих действий количество жуков увеличилось на 5. А как поменялось количество пауков?

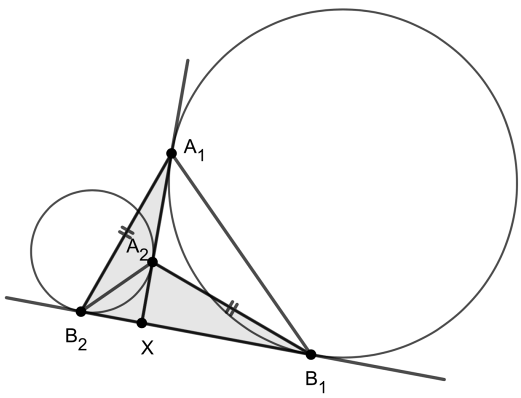
Бакаев Е.В.

Ответ. Количество пауков увеличилось на 8. **Решение.** При применении волшебного ореха либо на 1 увеличивается количество b жуков, либо на 1 уменьшается количество s пауков, т. е. разность $b - s$ всегда увеличивается на 1. При применении волшебного желудя наоборот: либо на 1 уменьшается количество b жуков, либо на 1 увеличивается количество s пауков, т. е. разность $b - s$ всегда уменьшается на 1. Итак, в результате всех операций разность $b - s$ увеличилась на 20 и уменьшилась на 23, значит, в итоге она уменьшилась на 3. Раз b увеличилось на 5, то s увеличилось на $5 + 3 = 8$.

2. Пусть ω_1 и ω_2 — две непересекающиеся окружности. Пусть одна из общих внутренних касательных к ω_1 и ω_2 касается их в точках A_1 и A_2 соответственно, а одна из общих внешних касательных к ω_1 и ω_2 касается их в точках B_1 и B_2 соответственно. Оказалось, что $A_1B_2 = A_2B_1$. Докажите, что $A_1B_2 \perp A_2B_1$.

Кожевников П.А.

Решение. Пусть X — точка пересечения касательных. Из равенства соответствующих отрезков касательных $XA_1 = XB_1$ и $XA_2 = XB_2$. А так как по условию $A_1B_2 = A_2B_1$, треугольники A_1XB_2 и B_1XA_2 равны (по третьему признаку). Отсюда $\angle A_1XB_2 = \angle A_2XB_1$, а так как эти углы смежные, оба они — по $90°$.



Таким образом, треугольник A_1XB_2 переходит в треугольник B_1XA_2 при повороте на $90°$ вокруг точки X, поэтому соответствующие стороны A_1B_2 и A_2B_1 этих треугольников перпендикулярны.

3. Задана последовательность $a_1 = 18$, $a_n = a_{n-1}^2 + 6a_{n-1}$ при $n > 1$. Докажите, что в этой последовательности не встретятся степени (выше первой) натуральных чисел.

Лучинин С.А.

Решение. Число $18 = 2^1{\cdot}3^2$. Посчитаем также $a_2 = 18^2{+}6{\cdot}18 = 432 = 2^4{\cdot}3^3$. Докажем, что каждый член последовательности, начиная со второго, можно представить в виде $a_k = 2^{k+2} \cdot 3^{k+1} \cdot t_k$, где t_k — целое, не делящееся на 2 и на 3.

В самом деле, для a_2 это верно; докажем, что если утверждение верно для a_i, то оно верно и для a_{i+1}. По предположению, $a_i = 2^{i+2} \cdot 3^{i+1} \cdot t_i$, где НОД$(t_i, 6) = 1$. По условию,

$$a_{i+1} = a_i^2 + 6a_i = a_i(a_i + 6) = 2^{i+3} \cdot 3^{i+2} \cdot t_i(2^{i+1} \cdot 3^i \cdot t_i + 1).$$

Так как $i \geqslant 2$, то последний множитель не делится ни на 2, ни на 3, то же верно для t_i. Значит, степени вхождения 2 и 3 в разложение на простые множители увеличились ровно на 1.

Осталось заметить, что число вида $2^{s+1}{\cdot}3^s{\cdot}m$, где НОД$(m, 6) = 1$, не может быть степенью натурального числа выше первой. Ведь если бы оно было p-той степенью натурального числа, то все простые множители входили бы в него в степени, кратной p. Тогда и числа $s + 1$ и s должны были бы делиться на p, что невозможно при $p > 1$.

4. Даны натуральные числа $n, k > 1$. Паша и Вова играют в игру на доске $n \times k$. Паша ходит первый. Они по очереди ставят бортики длиной 1 на границе двух соседних клеток. Проигрывает тот игрок, после хода которого нельзя добраться из левой нижней клетки в правую верхнюю, передвигаясь в соседние по стороне клетки (через бортики перепрыгивать нельзя!). Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

Лучинин С.А.

Ответ. Вова. **Решение.** Рассмотрим ситуацию “за ход до проигрыша”, т. е. в которой невозможно сделать ход, чтобы не проиграть.

Так как в этой ситуации игра еще никем не проиграна, имеется путь p по различным клеткам $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_t = B$, где A — левая нижняя клетка, B — правая верхняя клетка, а A_{i-1} и A_i — пара соседних по стороне клеток для каждого $i = 1, \ldots, t$. Заметим, что на t границах между клетками A_{i-1}, A_i нет бортиков, а на всех остальных $m = n(k - 1) + k(n - 1) - t$ границах должны стоять бортики, иначе в данной ситуации мог быть сделан ход, после которого остается путь p, в противоречие с выбором ситуации "за ход до проигрыша". Итак, к этому моменту было сделано m ходов. Покажем, что m четно. Это будет означать, что в ситуации “за ход до проигрыша” может оказаться только Паша. Значит у Вовы всегда есть ход, не ведущий к немедленному проигрышу, и поскольку игра завершится за конечное число ходов, Вова сможет победить.

Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. Клетки A и B одноцветные, если n и k одной четности, и разноцветные в противном случае. При движении по пути p при каждом переходе в соседнюю клетку цвет меняется. Значит, четность количества переходов, необходимых чтобы добраться из A в B, совпадает с четностью $n+k$. Тогда $t-(n+k)$ четно, поэтому $m = n(k-1)+k(n-1)-t$ также четно, что и требовалось.

2. Сеньоры *14 марта*

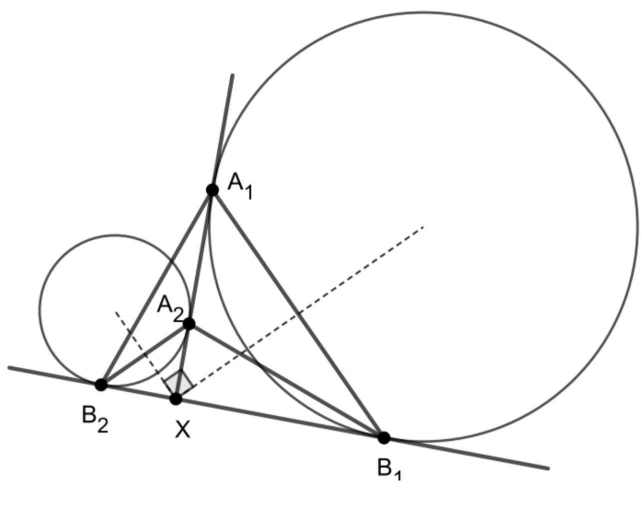
1. Существует ли конечное множество A, состоящее из натуральных чисел, обладающее следующим свойством: для каждого числа a, принадлежащего множеству A, хотя бы одно из чисел $2a$ и $a/3$ также принадлежит множеству A?

Seyyedsalehi M.H.

Ответ. Нет, не существует. **Решение.** Предположим, что такое множество A нашлось. Среди чисел множества A выберем числа, делящиеся на наибольшую степень двойки, а среди таких чисел выберем наименьшее число a. Пусть a делится на 2^k, но не делится на 2^{k+1}. Тогда $2a$ делится на 2^{k+1}, и согласно выбору a, $2a$ не принадлежит A, поэтому $a/3$ должно быть натуральным и принадлежать множеству A. Но тогда $a/3$ так же, как и a, делится на 2^k, но меньше a. Противоречие с выбором a.

2. Пусть ω_1 и ω_2 — две непересекающиеся окружности. Пусть одна из общих внутренних касательных к ω_1 и ω_2 касается их в точках A_1 и A_2 соответственно, а одна из общих внешних касательных к ω_1 и ω_2 касается их в точках B_1 и B_2 соответственно. Оказалось, что $A_1B_2 \perp A_2B_1$. Докажите, что $A_1B_2 = A_2B_1$.

Кожевников П.А.



Решение. Пусть X — точка пересечения касательных. Тогда A_1B_1 перпендикулярно биссектрисе угла A_1XB_1, а A_2B_2 перпендикулярно биссектрисе угла A_2XB_2, смежного с углом A_1XB_1. Так как эти биссектрисы перпендикулярны, то $A_1B_1 \perp A_2B_2$. Отсюда и из условия $A_1B_2 \perp A_2B_1$ следует, что A_1, A_2, B_1, B_2 — ортоцентрическая четверка (скажем, A_2 — ортоцентр треугольника $A_1B_1B_2$, Следовательно, $A_1A_2 \perp B_1B_2$.

Из равенства соответствующих отрезков касательных верно $XA_1 = XB_1$ и $XA_2 = XB_2$, поэтому прямоугольные треугольники A_1XB_2 и B_1XA_2 равны. Отсюда $A_1B_2 = A_2B_1$, что и требовалось.

3. Поле для игры — горизонтальная клетчатая полоска 1×2019. Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя выбирает n натуральных чисел и записывает их на доске, после чего Вася ставит фишку в одну из клеток. Далее на каждом следующем ходе Петя называет некоторое число s, которое выписано на доске, а Вася переставляет фишку на s клеток, если это возможно, вправо или влево — по своему выбору. Если же переставить фишку ни влево, ни вправо на s клеток не возможно, то фишка остается на месте. При каком наименьшем n Петя может играть так, чтобы фишка за конечное количество ходов побывала на всех клетках полоски?

Дидин М.А.

Ответ. $n = 2$. **Решение.** Ясно, что $n = 1$ не хватит: при $n = 1$ Петя обязан называть на всех ходах одно и то же число, и если Вася может сдвинуть фишку с начальной клетки A за один ход на клетку B, то в дальнейшем он может продолжать передвигать фишку из B в A, из A в B и т.д.

При $n = 2$ пусть Петя запишет на доске числа $k = 1009$ и $k + 1 = 1010$. Клетки полоски для удобства занумеруем числами $-k$, $-k + 1$, $\ldots$, -2, -1, 0, 1, 2, $\ldots$, k.

Пусть в начале игры Вася ставит фишку в клетку с номером $a < 0$. Тогда пусть Петя называет последовательно числа k и $k + 1$. В ответ Вася должен будет однозначно передвинуть фишку в клетку $a + k$ и далее в клетку $a - 1$. Продолжим так играть за Петю, пока фишка не окажется в клетке $-k$ (путь фишки: $a, a + k, a - 1, a + k - 1, a - 2, a + k - 2, \ldots, 2, -k + 1, 1, -k$). После этого пусть Петя сделает $2k$ ходов, поочередно называя $k + 1$ и k. Путь фишки однозначен: $-k, 1, -k + 1, 2, -k + 2, \ldots, k - 1, -1, k, 0$. Действуя по указанной стратегии, Петя выиграет. Аналогичная стратегия работает, если номер начальной клетки больше 0. Если же изначально Вася поставил фишку в клетку с номером 0, то Петя в первый раз назовет k, тогда Вася сдвинет фишку в одну из клеток $\pm k$, после чего Петя сможет применить описанную выше стратегию.

4. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (то есть определённые на множестве натуральных чисел и принимающие натуральные значения), что для любых натуральных m и n число $f(m) + n - m$ делится на $f(n)$.

Saghafian M.

Ответ. 1) $f(n) = n + c$ для любого c;
2) $f(n) = 1$;
3) $f(n) = 1$ при чётных n и $f(n) = 2$ при нечётных n;

4) $f(n) = 2$ при чётных n и $f(n) = 1$ при нечётных n.

Решение. Предположим, что $f(n)$ может принимать сколь угодно большие значения. Перепишем сравнение $f(m) - m \equiv f(n) - n \pmod{f(n)}$. Тогда предположим, что $f(a) - a \neq f(b) - b$ для каких-то a и b. Рассмотрим такое n, что $f(n) > |f(a)-a|+|f(b)-b|$. Тогда $f(a)-a \equiv f(n)-n \pmod{f(n)}$ и в то же время $f(b)-b \equiv f(n)-n \pmod{f(n)}$. То есть $f(a)-a-(f(b)-b)$ делится на $f(n)$, но $f(n)$ было специально выбрано достаточно большим, чтобы это было невозможно.

Поэтому, если $f(n)$ принимает сколь угодно большие значения, то $f(n)-n$ — константа. Очевидно, что все такие функции подходят.

Остался случай, когда $f(n)$ принимает только конечное число значений. Перепишем сравнение в виде

$$m - f(m) \equiv n \pmod{f(n)}. \qquad (1)$$

Обозначим наибольшее значение $f(n)$ через s, а через a обозначим такое число, что $f(a) = s$.

Пусть $s = 1$, тогда для любого n, $f(n) = 1$.

Пусть $s = 2$. Тогда если a нечётное, то из (1) получаем, что m и $f(m)$ должны быть разной чётности для всех m. Отсюда $f(n) = 1$ для чётных n и $f(n) = 2$ для нечётных n. Если же a чётное, то m и $f(m)$ должны быть одной чётности для всех m, откуда $f(n) = 1$ для нечётных n и $f(n) = 2$ для чётных n.

Пусть теперь $s > 2$. Подставим в (1) a вместо n. Получим, что $f(m) \equiv m-a \pmod{s}$. Кроме того, мы знаем, что $1 \leqslant f(m) \leqslant s$, откуда получаем, что для любого k, $f(a+ks) = s$, и для любого t, $f(a+ts-1) = s-1$. Теперь подставим в (1) $a + ks$ вместо m и $a + ts - 1$ вместо n, получим $a + ks - s \equiv a + ts - 1 \pmod{s-1}$ или $1 \equiv t - k \pmod{s-1}$. Но так как k и t можно выбрать любыми, получаем противоречие.