V Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 2

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Д. К. Мамий
П. А. Кожевников
Д. А. Белов
В. А. Брагин
Е. В. Бакаев
Л. А. Емельянов
Ч. Лейтем
В. В. Новиков
М. Сагафиян
А. А. Полянский

13–18 марта 2020 г.
г. Майкоп
Республика Адыгея

1. Юниоры *15 марта*

5. Найдите количество пар натуральных чисел a и b, не превосходящих 100 000, удовлетворяющих равенству

$$\frac{a^3-b}{a^3+b}=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}.$$

Белов Д.А.

Ответ. 10 пар. **Решение.** Преобразуем данное выражение, домножив дроби на произведение знаменателей:

$$a^3b^2+a^5-b^3-a^2b=a^3b^2-a^5+b^3-a^2b,$$

что после приведения подобных и сокращения на 2 обретает вид $a^5=b^3$. Так как преобразования равносильны (знаменатели исходных дробей при натуральных числах ненулевые), то достаточно найти количество пар натуральных a и b, для которых $a^5=b^3$. При таком условии b является пятой степенью, а число a — точным кубом. Пятых степеней до 100 000 всего 10 штук, и каждой будет соответствовать куб, не превосходящий 100 000. Значит, подходящих пар всего 10 штук.

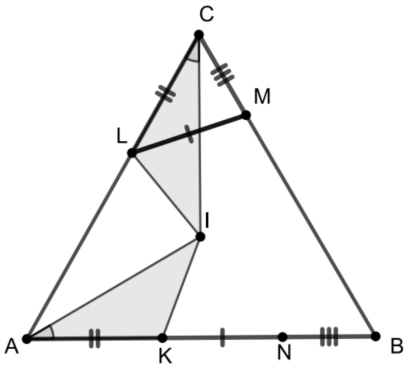
6. Вершины правильного стоугольника покрашены в 10 цветов. Докажите, что можно выбрать 4 вершины этого стоугольника, являющиеся вершинами прямоугольника и покрашенные не более чем в два различных цвета.

Бакаев Е.В.

Решение. Впишем данный стоугольник в окружность. Рассмотрим каждый из 50 диаметров, образуемых вершинами стоугольника. Заметим, что если среди них есть два диаметра, для которых набор цветов вершин совпадает, то четыре конца этих диаметров образуют подходящий под условие прямоугольник. Вариантов раскрасить концы диаметра в два различных цвета (без учета порядка) всего $10\cdot9:2=45$. Значит, если подходящий прямоугольник еще не найден, найдутся хотя бы пять диаметров, концы которых одноцветны. Выберем любые два, их концы образуют подходящий прямоугольник.

7. Дан правильный треугольник ABC. Точки K и N отмечены на стороне AB, точка L отмечена на стороне AC, а точка M — на стороне BC так, что $CL=AK$, $CM=BN$, $ML=KN$. Докажите, что $KL\parallel MN$.

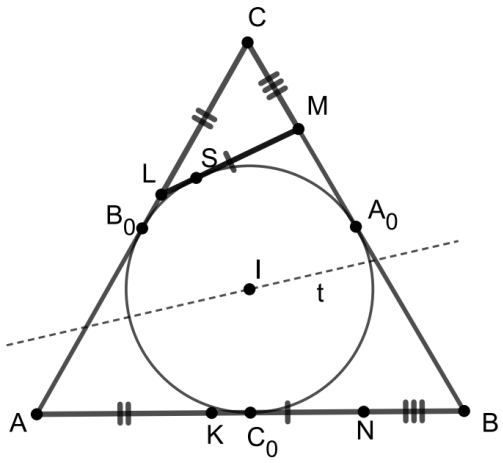
Бакаев Е.В.



Решение. Заметим сначала, что точки A, K, N, B следуют именно в таком порядке. В противном случае мы имели бы $LM = KN < AK = CL$ и аналогично $LM < CM$. Но в треугольнике CLM сторона LM не может быть наименьшей, так как она лежит напротив угла 60°, которые не является наименьшим.

Решение 1. Пусть I — центр треугольника ABC. Поскольку $IC = IA$, $\angle ICL = \angle IAK = 30^\circ$ и $CL = AK$ (из условия), треугольники ICL и IAK равны (совмещаются поворотом вокруг O на 120°). Отсюда $IL = IK$. Аналогично $IM = IN$.

Тогда треугольники ILM и IKN равны по трем сторонам, значит они симметричны относительно некоторой прямой ℓ, проходящей через I. Тогда каждая из прямых KL и MN перпендикулярна ℓ.



Решение 2. Пусть вписанная окружность ω касается сторон AB, BC, CA в точках C_0, A_0, B_0 соответственно, тогда C_0, A_0, B_0 — середины сторон. Периметр треугольника CLM равен $AB = AC = BC$, а полупериметр равен $CA_0 = CB_0$. Тогда ω совпадает с вневписанной окружностью треугольника CLM. Тем самым, обе прямые KN и LM являются касательными к ω, они симметричны относительно некоторой прямой t, проходящей через I.

Пусть S — точка касания LM и ω, так что S и C_0 симметричны относительно t. Имеем $LS = B_0L = B_0C - LC = C_0A - KA = KC_0$. Полученное равенство означает, что отрезки LS и KC_0 симметричны относительно t, откуда $KL \perp t$. Аналогично $MN \perp t$.

8. Вещественные числа a, b и c удовлетворяют условию

$$abc + a + b + c = ab + bc + ca + 5.$$

Какое минимальное значение может принимать $a^2 + b^2 + c^2$?

Антропов А.В., Брагин В.А.

Ответ. 6. **Решение.** Преобразуем условие как $(a-1)(b-1)(c-1) = 4$. Сразу приведем пример, когда $a = -1$, $b = -1$ и $c = 2$, тогда $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Докажем, что это значение является минимальным. Возможны два случая.

Случай 1. Все скобки положительны. Тогда все три числа a, b и c больше единицы. Так как произведение трех положительных скобок равно 4, то по крайней мере одна скобка больше 1, то есть хотя бы одно из чисел a, b и c больше 2. Тогда сумма трех квадратов больше, чем $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$, а найденное выше значение в точности равно 6.

Случай 2. Две скобки отрицательны, одна скобка положительна. Пусть отрицательными являются скобки $a-1$ и $b-1$. Заменим их на $1-a$ и $1-b$, чтобы все три множителя стали положительными. Также домножим произведение на 2, чтобы получить

$$(1-a)(1-b)(2c-2)=8.$$

Для чисел $1-a$, $1-b$ и $2-2c$ применим неравенство между средними арифметическим и геометрическим для трех чисел, тогда

$$\frac{(1-a)+(1-b)+(2c-2)}{3}\geqslant\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(2c-2)}=2,$$

$$2c-a-b\geqslant 6.$$

Докажем, что из последнего условия следует, что $a^2+b^2+c^2\geqslant 6$. Заметим, что выполняются три условия: $a^2+1\geqslant -2a$, $b^2+1\geqslant -2b$, $c^2+4\geqslant 4c$. Сложим эти три неравенства, получим

$$a^2+b^2+c^2+6\geqslant 4c-2a-2b\geqslant 12,$$

где последнее неравенство получается домножением условия $2c-a-b\geqslant 6$ на 2. Итак, $a^2+b^2+c^2+6\geqslant 12$, или $a^2+b^2+c^2\geqslant 6$, что и доказывалось.

2. Сеньоры *15 марта*

5. Вершины правильного стоугольника покрашены в 10 цветов. Докажите, что можно выбрать 4 вершины этого стоугольника, являющиеся вершинами прямоугольника и покрашенные не более чем в два различных цвета.

Бакаев Е.В.

Решение. Впишем данный стоугольник в окружность. Рассмотрим каждый из 50 диаметров, образуемых вершинами стоугольника. Заметим, что если среди них есть два диаметра, для которых набор цветов вершин совпадает, то четыре конца этих диаметров образуют подходящий под условие прямоугольник. Вариантов раскрасить концы диаметра в два различных цвета (без учета порядка) всего $10\cdot 9:2=45$. Значит, если подходящий прямоугольник еще не найден, найдутся хотя бы пять диаметров, концы которых одноцветны. Выберем любые два, их концы образуют подходящий прямоугольник.

6. Мортеза хочет придумать два вещественных числа S и P, а после этого расставить по окружности шесть попарно различных вещественных чисел так, чтобы для любых трех подряд идущих по окружности чисел было выполнено хотя бы одно из двух условий:

1) сумма этих трех чисел равна S;

2) произведение этих трех чисел равно P.

Выясните, осуществимо ли желание Мортезы.

Saghafian M.

Ответ. Нет, не осуществимо. **Решение.** Предположим, искомая расстановка шести чисел $a_1, \ldots, a_6$ нашлась. Тройку идущих подряд чисел называем *красной*, если их сумма равна S, и *синей* в противном случае, тогда произведение чисел в синей тройке равно P.

1) Две тройки, пересекающиеся по двум числам, не могут быть обе красными. Действительно, если скажем, $a_1+a_2+a_3 = a_2+a_3+a_4 = S$, то $a_1 = a_4$ — противоречие.

2) Если две тройки, пересекающиеся по двум числам, обе синие, то $P = 0$. Действительно, если скажем, $a_1a_2a_3 = a_2a_3a_4 = P \neq 0$, то $a_1 = a_4$ — противоречие.

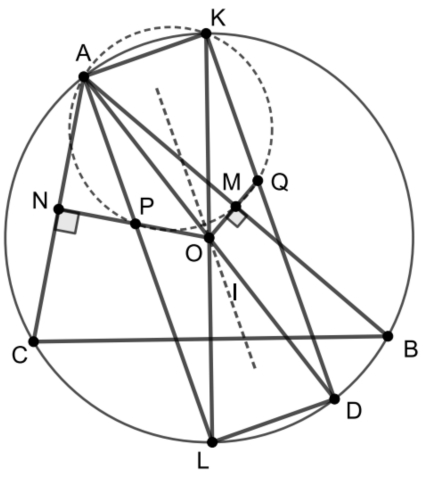
3) Случай $P = 0$ невозможен. Действительно, среди чисел a_i не более одного нуля, поэтому найдется четверка подряд идущих ненулевых чисел. Тогда эта четверка должна содержать две красные тройки вопреки 1).

4) Из 1), 2), 3) следует, что цвета в тройках (a_1, a_2, a_3), (a_2, a_3, a_4), (a_3, a_4, a_5), $(a_4, , a_5, a_6)$, (a_5, a_6, a_1), (a_6, a_1, a_2) чередуются.

5) Пусть для определенности (a_1, a_2, a_3), (a_3, a_4, a_5), (a_5, a_6, a_1) — красные тройки, а остальные тройки — синие. Тогда $a_1 + a_2 + a_3 = a_3 + a_4 + a_5$, откуда $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$. Кроме того, $a_6a_1a_2 = a_4a_5a_6 = P \neq 0$ (в силу 3)), откуда $a_1a_2 = a_4a_5$. Получается, что в парах чисел (a_1, a_2) и (a_4, a_5) равны как суммы, так и произведения. Значит, эти пары являются корнями одного и того же квадратного трехчлена, следовательно совпадают. Окончательно получаем противоречие с условием попарной различности чисел.

7. Дан треугольник ABC, в котором $AB \neq AC$. Пусть M — середина отрезка AB, K — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC, а P — точка, в которой серединный перпендикуляр к AC пересекает биссектрису угла BAC. Докажите, что точки A, M, K, P лежат на одной окружности.

Кожевников П.А.



Решение. Пусть KL и AD — диаметры окружности (ABC). Тогда $AKDL$ — прямоугольник, центр O которого является центром окружности. Обозначим через ℓ ту из осей симметрии прямоугольника $AKDL$, которая параллельна AL.

Заметим, что AL — биссектриса угла BAC. Отсюда $P = AL \cap ON$, где N — середина AC.

Серединные перпендикуляры OM и ON к сторонам AB и AC составляют равные углы с AL, поэтому OM и ON симметричны относительно ℓ. Значит точки P и $Q = KD \cap OM$ симметричны относительно ℓ, тем самым $AKQP$ — прямоугольник, и точки A, K, Q, P лежат на окружности ω с диаметром AQ. Но поскольку $AM \perp QM$ ($AB \perp OM$), точка M также лежит на ω.

Замечание. Верно также утверждение, аналогичное данной задаче: A, M, L и $ON \cap AK$ лежат на одной окружности.

8. Петя записал на доске 100 различных целых чисел. Вася должен поставить в каждую клетку таблицы 100×100 по целому числу так, чтобы в каждом клетчатом прямоугольнике 1×3 (как горизонтальном, так и вертикальном) сумма чисел была равна одному из чисел, выписанных на доске. При каком наибольшем целом n Вася гарантированно (т. е. какие бы числа Петя ни написал) сможет заполнить таблицу так, чтобы в ней встретились хотя бы по разу числа $1, 2, \ldots, n$ (и, возможно, какие-то другие целые числа)?

Бакаев Е.В.

Ответ. 6. **Решение.** Пусть Петя выписал числа a_1, a_2, …, a_{100}. Пример получается повторением таблички 3×3, расположенной ниже. Сумма чисел в любом прямоугольнике 1×3 равна a_1.

1	5	$a_1 - 6$
6	$a_1 - 8$	2
$a_1 - 7$	3	4

Пусть все Петины числа делятся на некоторое $k > 18$. Рассмотрим произвольное заполнение таблицы, удовлетворяющее условию, и покажем, что в нем нельзя написать все числа от 1 до 7 одновременно.

Рассмотрим произвольный прямоугольник 1×4, пусть в нем записаны числа a, b, c, d. Суммы $a + b + c$ и $b + c + d$ должны быть равны каким-то Петиным числам, а значит, обе делятся на k. Тогда делится на k и их разность $a - d$. Таким образом, записанные в крайних клетках прямоугольника числа a и d дают одинаковые остатки при делении на k.

Раскрасим таблицу в 9 цветов следующим образом:

c_1	c_2	c_3	c_1	c_2	c_3	…
c_4	c_5	c_6	c_4	c_5	c_6	…
c_7	c_8	c_9	c_7	c_8	c_9	…
c_1	c_2	c_3	c_1	c_2	c_3	…
c_4	c_5	c_6	c_4	c_5	c_6	…
c_7	c_8	c_9	c_7	c_8	c_9	…
…	…	…	…	…	…	…

Рассмотрим один из цветов c_i. Числа в любых двух “соседних” клетках этого цвета дают одинаковые остатки при делении на k, так как они находятся

в крайних клетках одного прямоугольника 1×4. Т.к. от любой клетки цвета c_i можно дойти до любой другой клетки цвета c_i, переходя каждый раз в такие "соседние" клетки того же цвета, то числа во всех клетках цвета c_i дают один и тот же остаток при делении на k.

Таким образом, каждое число в таблице дает такой же остаток при делении на k, как одно из чисел левого верхнего квадрата 3×3. Покажем, что в нем нельзя расставить числа так, чтобы встречались все остатки от 1 до 7 при делении на k. Докажем это от противного. Пусть в 7 клетках квадрата 3×3 стоят числа с остатками от 1 до 7. Тогда какие-то три из них образуют прямоугольник 1×3 и их сумма должна делиться на k. Но сумма этих трех остатков больше 0 и не больше $5 + 6 + 7 = 18$, что меньше k. Значит, она не может делиться на k; противоречие.