V Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 13–18 марта 2020 года

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Юниоры. Первый день
14 марта

1. Использовав один волшебный орех, Баба Яга может превратить блоху в жука или паука в клопа. Использовав один волшебный желудь, может превратить блоху в паука или жука в клопа. За вечер Баба Яга потратила 20 волшебных орехов и 23 волшебных желудя. За счет этих действий количество жуков увеличилось на 5. А как поменялось количество пауков?

2. Пусть ω_1 и ω_2 — две непересекающиеся окружности. Пусть одна из общих внутренних касательных к ω_1 и ω_2 касается их в точках A_1 и A_2 соответственно, а одна из общих внешних касательных к ω_1 и ω_2 касается их в точках B_1 и B_2 соответственно. Оказалось, что $A_1B_2 = A_2B_1$. Докажите, что $A_1B_2 \perp A_2B_1$.

3. Задана последовательность $a_1 = 18$, $a_n = a_{n-1}^2 + 6a_{n-1}$ при $n > 1$. Докажите, что в этой последовательности не встретятся степени (выше первой) натуральных чисел.

4. Даны натуральные числа $n, k > 1$. Паша и Вова играют в игру на доске $n \times k$. Паша ходит первый. Они по очереди ставят бортики длиной 1 на границе двух соседних клеток. Проигрывает тот игрок, после хода которого нельзя добраться из левой нижней клетки в правую верхнюю, передвигаясь в соседние по стороне клетки (через бортики перепрыгивать нельзя!). Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

V Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 13–18 марта 2020 года

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Юниоры. Второй день
15 марта

5. Найдите количество пар натуральных чисел a и b, не превосходящих 100 000, удовлетворяющих равенству

$$\frac{a^3-b}{a^3+b}=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}.$$

6. Вершины правильного стоугольника покрашены в 10 цветов. Докажите, что можно выбрать 4 вершины этого стоугольника, являющиеся вершинами прямоугольника и покрашенные не более чем в два различных цвета.

7. Дан правильный треугольник ABC. Точки K и N отмечены на стороне AB, точка L отмечена на стороне AC, а точка M — на стороне BC так, что $CL=AK$, $CM=BN$, $ML=KN$. Докажите, что $KL \parallel MN$.

8. Вещественные числа a, b и c удовлетворяют условию

$$abc+a+b+c=ab+bc+ca+5.$$

Какое минимальное значение может принимать $a^2+b^2+c^2$?

V Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 13–18 марта 2020 года

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Сеньоры. Первый день
14 марта

1. Существует ли конечное множество A, состоящее из натуральных чисел, обладающее следующим свойством: для каждого числа a, принадлежащего множеству A, хотя бы одно из чисел $2a$ и $a/3$ также принадлежит множеству A?

2. Пусть ω_1 и ω_2 — две непересекающиеся окружности. Пусть одна из общих внутренних касательных к ω_1 и ω_2 касается их в точках A_1 и A_2 соответственно, а одна из общих внешних касательных к ω_1 и ω_2 касается их в точках B_1 и B_2 соответственно. Оказалось, что $A_1B_2 \perp A_2B_1$. Докажите, что $A_1B_2 = A_2B_1$.

3. Поле для игры — горизонтальная клетчатая полоска 1×2019. Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя выбирает n натуральных чисел и записывает их на доске, после чего Вася ставит фишку в одну из клеток. Далее на каждом следующем ходе Петя называет некоторое число s, которое выписано на доске, а Вася переставляет фишку на s клеток, если это возможно, вправо или влево — по своему выбору. Если же переставить фишку ни влево, ни вправо на s клеток не возможно, то фишка остается на месте. При каком наименьшем n Петя может играть так, чтобы фишка за конечное количество ходов побывала на всех клетках полоски?

4. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (то есть определённые на множестве натуральных чисел и принимающие натуральные значения), что для любых натуральных m и n число $f(m) + n - m$ делится на $f(n)$.

V Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 13–18 марта 2020 года

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Сеньоры. Второй день
15 марта

5. Вершины правильного стоугольника покрашены в 10 цветов. Докажите, что можно выбрать 4 вершины этого стоугольника, являющиеся вершинами прямоугольника и покрашенные не более чем в два различных цвета.

6. Мортеза хочет придумать два вещественных числа S и P, а после этого расставить по окружности шесть попарно различных вещественных чисел так, чтобы для любых трех подряд идущих по окружности чисел было выполнено хотя бы одно из двух условий:

1) сумма этих трех чисел равна S;

2) произведение этих трех чисел равно P.

Выясните, осуществимо ли желание Мортезы.

7. Дан треугольник ABC, в котором $AB \neq AC$. Пусть M — середина отрезка AB, K — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC, а P — точка, в которой серединный перпендикуляр к AC пересекает биссектрису угла BAC. Докажите, что точки A, M, K, P лежат на одной окружности.

8. Петя записал на доске 100 различных целых чисел. Вася должен поставить в каждую клетку таблицы 100×100 по целому числу так, чтобы в каждом клетчатом прямоугольнике 1×3 (как горизонтальном, так и вертикальном) сумма чисел была равна одному из чисел, выписанных на доске. При каком наибольшем целом n Вася гарантированно (т. е. какие бы числа Петя ни написал) сможет заполнить таблицу так, чтобы в ней встретились хотя бы по разу числа $1, 2, \ldots, n$ (и, возможно, какие-то другие целые числа)?