VI Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 12–17 марта 2021 года

# Юниоры. Первый день

13 марта

**1.** Числа $a$, $b$ и $c$ (не обязательно целые) удовлетворяют условиям $a^2 + b = c^2$, $b^2 + c = a^2$, $c^2 + a = b^2$. Чему может быть равно произведение $abc$?

**2.** В треугольнике $ABC$ на медиане $BM$ выбрана точка $K$ так, что $CK = CM$. Известно, что $\angle CBM = 2\angle ABM$. Докажите, что $BC = MK$.

**3.** Даны $n > 2$ целых чисел, не равных 0. Известно, что каждое из этих чисел делится на сумму остальных $n-1$ чисел. Докажите, что сумма всех данных чисел равна 0.

**4.** На клетчатой бумаге выложен из спичек квадрат $2n \times 2n$ (на границе между двумя клетками лежит спичка длины 1, длина стороны клетки тоже равна 1). За один ход Петя может выбрать узел, из которого (в данный момент) исходят 3 или 4 спички, и убрать две спички, выходящие из этого узла и образующие отрезок длины 2. Какое наименьшее количество спичек может остаться после некоторого количества петиных ходов?

**VI Кавказская математическая олимпиада**
**г. Майкоп, 12–17 марта 2021 года**

# Сеньоры. Первый день

**13 марта**

**1.** Числа 1, 2, 3, …, 100 расставлены в ряд в некотором порядке. Назовём число *большим правым*, если оно больше каждого числа, стоящего правее него. Назовём число *большим левым*, если оно больше каждого числа, стоящего левее него. Оказалось, что есть ровно $k$ больших правых чисел и ровно $k$ больших левых чисел. При каком наибольшем $k$ такое возможно?

**2.** Даны $n > 2$ целых чисел, не равных 0. Известно, что каждое из этих чисел делится на сумму остальных $n-1$ чисел. Докажите, что сумма всех данных чисел равна 0.

**3.** Дано натуральное $n \geqslant 3$. На плоскости отмечают $n$ точек так, что не все они лежат на одной прямой. Найдите наименьшее возможное количество треугольников с вершинами в отмеченных точках.

*Напомним, что вершины треугольника не лежат на одной прямой.*

**4.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AH_a$ и $BH_b$. Прямая $H_aH_b$ пересекает описанную окружность треугольника $ABC$ в точках $P$ и $Q$. Точка $A'$ симметрична точке $A$ относительно $BC$, точка $B'$ симметрична точке $B$ относительно $AC$. Докажите, что точки $A'$, $B'$, $P$ и $Q$ лежат на одной окружности.

# Юниоры. Второй день

**14 марта**

**5.** Натуральные числа $a$, $b$ и $c$ таковы, что произведение

$$\text{НОД}(a,b)\cdot\text{НОД}(a,c)\cdot\text{НОД}(b,c)$$

является точным квадратом. Докажите, что произведение

$$\text{НОК}(a,b)\cdot\text{НОК}(a,c)\cdot\text{НОК}(b,c)$$

также является точным квадратом.

**6.** В ряд выложен 2021 шарик. Паша и Вова играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Паша. За каждый ход разрешается покрасить один из еще не покрашенных шариков в один из трёх цветов: красный, жёлтый или зелёный (в начале игры все шарики не покрашены). После того, как все шарики покрашены, победа присуждается Паше, если в ряду найдутся три подряд идущих шарика трёх разных цветов; иначе победа присуждается Вове. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

**7.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведена высота $AD$, отмечены точка пересечения высот $H$ и центр описанной окружности $O$. На отрезке $AH$ нашлась точка $K$ такая, что $AK = HD$, а на отрезке $CD$ нашлась точка $L$ такая, что $CL = DB$. Докажите, что прямая $KL$ проходит через точку $O$.

**8.** Конечное множество натуральных чисел назовем *красивым*, если количество чисел в этом множестве равно их среднему арифметическому. Назовем число $n$ *удивительным*, если множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно разбить на красивые подмножества.

**(a)** Докажите, что все точные квадраты удивительны.

**(b)** Докажите, что, к сожалению, существует бесконечно много натуральных чисел, не являющихся удивительными.

**VI Кавказская математическая олимпиада**
**г. Майкоп, 12–17 марта 2021 года**

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

# Сеньоры. Второй день

**14 марта**

**5.** Дан треугольник со сторонами $a \leqslant b \leqslant c$. Известно, что из его высот нельзя составить треугольник. Докажите, что $b^2 > ac$.

**6.** В ряд выложен 2021 шарик. Паша и Вова играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Паша. За каждый ход разрешается покрасить один из еще не покрашенных шариков в один из трёх цветов: красный, жёлтый или зелёный (в начале игры все шарики не покрашены). После того, как все шарики покрашены, победа присуждается Паше, если в ряду найдутся три подряд идущих шарика трёх разных цветов; иначе победа присуждается Вове. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

**7.** На плоскости лежат 4 фишки. Если фишки находятся в вершинах выпуклого четырёхугольника $P$, то разрешается выполнить такую операцию: выбрать одну из фишек и сдвинуть её перпендикулярно диагонали четырёхугольника $P$, соединяющей две другие фишки; при этом запрещается, чтобы в процессе движения фишка оказалась на одной прямой с двумя другими фишками.

Пусть изначально фишки находились в вершинах прямоугольника $\Pi$, а после выполнения нескольких операций они находились в вершинах прямоугольника $\Pi'$, подобного $\Pi$, но не равного ему. Докажите, что прямоугольник $\Pi$ является квадратом.

**8.** Дана бесконечная таблица, строки и столбцы которой занумерованы натуральными числами. Для последовательности функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\ldots$ в ячейку $(i, j)$ таблицы запишем число $f_i(j)$ (для всех $i$, $j \in \mathbb{N}$). Последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$ назовём *красивой*, если все числа в таблице — натуральные, и при этом каждое натуральное число встречается в таблице ровно один раз. Существует ли красивая последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, в которой каждая функция $f_i(x)$ является многочленом степени 101 с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1?