VI Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 1

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Д. К. Мамий
П. А. Кожевников
Д. А. Белов
В. А. Брагин
Е. В. Бакаев
Л. А. Емельянов
Ч. Лейтем
К. А. Сухов
С. А. Лучинин
М. Сагафиян
А. А. Полянский

12–17 марта 2021 г.
г. Майкоп
Республика Адыгея

1. Юниоры **13 Марта**

1. Числа a, b и c (не обязательно целые) удовлетворяют условиям $a^2+b=c^2$, $b^2+c=a^2$, $c^2+a=b^2$. Чему может быть равно произведение abc?

Белов Д.А.

Ответ. 0. **Решение 1.** Сложим все данные условия и приведем подобные слагаемые. Получим $a+b+c=0$. Подставим $c=-a-b$ в первое условие:

$$\begin{aligned} a^2+b &= a^2+b^2+2ab; \\ b(b+2a-1) &= 0. \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что либо $b=0$ и тогда произведение $abc=0$, либо $b+2a-1=0$, и тогда $b=-2a+1$. В первом случае ответ получен, во втором случае подставим $b=-2a+1$ и $c=-a-b=a-1$ в третьей условие:

$$\begin{aligned} 4a^2-4a+1+a-1 &= a^2; \\ 3a^2-3a &= 0; \\ 3a(a-1) &= 0. \end{aligned}$$

Итак, либо $a=0$, и искомое произведение равно 0, либо $a=1$, и тогда $c=a-1=0$, и abc также равно 0.

Решение 2. Докажем, что среди чисел a, b и c есть хотя бы один 0.

Предположим, что среди чисел a, b и c есть два равных или противоположных, для определенности пусть это a и b. Тогда $a^2=b^2$, и из второго уравнения $c=0$. Аналогично рассматриваем случаи $b=\pm c$, $c=\pm a$.

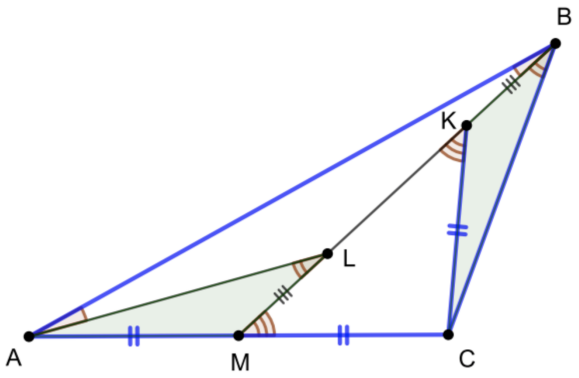
Теперь пусть среди чисел a b и c нет равных и противоположных. Складывая первые два уравнения, имеем $a^2+b+b^2+c=c^2+a^2$, откуда $b^2-c^2+b+c=0$, $(b-c)(b+c)+b+c=0$, $(b-c+1)(b+c)=0$, а поскольку $b\neq -c$, имеем $b-c+1=0$. Аналогично (складывая второе уравнение с третьим, а также третье с первым) имеем $c-a+1=0$, $a-b+1=0$. Но сложив все три полученных равенства, получим $0=3$, т. е. рассматриваемый случае не возможен.

Замечание. Как мы видим из решений, не обязательно все три числа равны 0. Например, подходит тройка $a=1$, $b=-1$, $c=0$.

2. В треугольнике ABC на медиане BM выбрана точка K так, что $CK=CM$. Известно, что $\angle CBM=2\angle ABM$. Докажите, что $BC=MK$.

Бакаев Е.В.

Решение. На медиане BM построим точку L такую, что $BK = LM$. Тогда $MK = BL$. Заметим, что треугольники AML и CKB равны. Действительно, $BK = LM$ по построению, а поскольку треугольник MCK равнобедренный, имеем $AM = MC = CK$ и $\angle AML = 180^\circ - \angle KMC = 180^\circ - \angle MKC = \angle CKB$. Отсюда $\angle ALM = \angle CBM$ и $AL = BC$. Для завершения решения остается показать, что $AL = BL$ или, что эквивалентно, $\angle ABL = \angle BAL$.



Если $\angle ABM = x$, то $\angle ALM = \angle CBM = 2x$, откуда $\angle BAL = \angle ALM - \angle ABL = 2x - x = x$.

3. Даны $n > 2$ целых чисел, не равных 0. Известно, что каждое из этих чисел делится на сумму остальных $n - 1$ чисел. Докажите, что сумма всех данных чисел равна 0.

Saghafian M.

Решение. Предположим, что сумма S данных чисел не равна 0. Пусть, не умаляя общности, она положительна: в противном случае можно домножить все числа на -1, и условие не изменится, а сумма станет положительной.

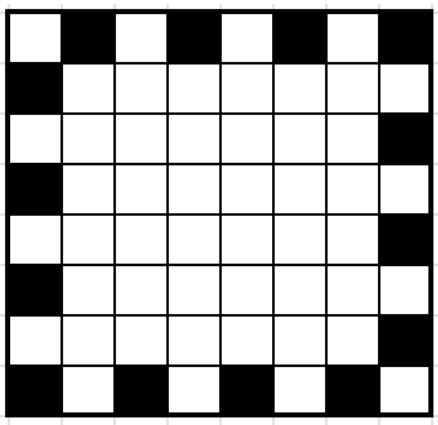
Пусть a — наименьшее из данных чисел. Тогда $a < S/2$, иначе $S \geqslant na > 2 \cdot S/2 = S$ — противоречие. Но тогда число a ближе к 0, чем к S: $|a| < |S - a|$, и поскольку $a \neq 0$, a не может делиться на $S - a$ (сумму всех остальных $n - 1$ чисел). Противоречие.

4. На клетчатой бумаге выложен из спичек квадрат $2n \times 2n$ (на границе между двумя клетками лежит спичка длины 1, длина стороны клетки тоже равна 1). За один ход Петя может выбрать узел, из которого (в данный момент) исходят 3 или 4 спички, и убрать две спички, выходящие из этого узла и образующие отрезок длины 2. Какое наименьшее количество спичек может остаться после некоторого количества петиных ходов?

Лучинин С.А.

Ответ. $4n-2$. **Решение.** *Пример.* Пронумеруем спичечные столбцы и строчки таблицы $2n \times 2n$ от 1 до $2n + 1$. Сначала уберём все спички на границе. Затем уберём по 2 верхние спички 2-го, 4-го, ... $2n$-го столбцов. Затем во 2-й строчке уберём $2n - 2$ спичек($n - 1$ отрезок длины 2) так, чтобы остались спички по краям. Затем уберём по 2 спички из 3-го, 5-го, ..., $(2n - 1)$-го столбцов так, чтобы сверху осталось по одной спичке в этих столбцах. Далее уберём все спички 3-й строчки. Затем уберём по 2 верхние спички чётных столбцов, затем $2n - 2$ средних спичек 4-й строчки, затем верхние спички в

нечётных столбцах, а затем все спички 5-й строки. Будем дальше продолжать этот алгоритм, несложно убедиться, что останутся только крайние спички в нечётных столбцах (не считая 1 и $2n+1$) и чётных строках, в итоге $4n-2$.



Оценка, способ 1. Выделим на границе квадрата единичные квадратики через один, как показано на картинке. Для каждого такого квадратика из четырех спичек, образующих его, покрасим те спички, которые не лежат на границе квадрата $2n \times 2n$ (так, в двух выделенных угловых квадратиках покрашены по две спички, а в остальных выделенных квадратиках — по три). Заметим, что для каждого выделенного квадратика K мы не сможем убрать все покрашенные спички. Действительно, чтобы убрать такую спичку, в качестве узла надо брать вершину квадратика K, не лежащую на границе квадрата $2n \times 2n$ (а таких вершин на 1 меньше, чем покрашенных спичек в K), и при этом нельзя использовать один и тот же узел дважды, и нельзя убрать две покрашенные спички квадратика K одних ходом.

Таким образом, в конце останется хотя бы по одной покрашенной спичке в каждом из выделенных $4n-2$ квадратиков.

Оценка, способ 2. Покрасим синим все спички, которые не лежат на границе квадрата $2n \times 2n$. Всего покрашено $2n-1$ горизонтальных и вертикальных рядов по $2n$ спичек. Итого, у нас $2(2n-1) \cdot 2n$ синих спичек.

Заметим, что узел можно выбирать в качестве середины отрезка из двух спичек не более одного раза. При этом синюю спичку можно убрать только если выбран узел, не лежащий на границе квадрата $2n \times 2n$. Таких узлов $(2n-1)^2$, а значит, мы уберем не более $2(2n-1)^2$ спичек. Таким образом, в конце останется не менее $2(2n-1) \cdot 2n - 2(2n-1)^2 = 2(2n-1)$ синих спичек.

2. Сеньоры **13 марта**

1. Числа 1, 2, 3, ..., 100 расставлены в ряд в некотором порядке. Назовём число *большим правым*, если оно больше каждого числа, стоящего правее него. Назовём число *большим левым*, если оно больше каждого числа, стоящего левее него. Оказалось, что есть ровно k больших правых чисел и ровно k больших левых чисел. При каком наибольшем k такое возможно?

Saghafian M.

Ответ. 50. **Решение.** *Пример.* Расставим сначала всё чётные числа в порядке возрастания, затем 1, затем все остальные нечётные числа в порядке убывания. В этой ситуации все чётные числа являются большими левыми, а 100 и 3, 5, ... 99 — большими правыми.

Оценка. Заметим, что только число 100 может быть одновременно и большим справа и большим слева, каждое из остальных 99 чисел может увеличить на 1 только одно из количеств. Итого суммарное количество больших левых и правых чисел не более $2 + 99 = 101$, поэтому больше 50 чисел и того и другого вида одновременно быть не может.

2. Даны $n > 2$ целых чисел, не равных 0. Известно, что каждое из этих чисел делится на сумму остальных $n - 1$ чисел. Докажите, что сумма всех данных чисел равна 0.

Saghafian M.

Решение. Предположим, что сумма S данных чисел не равна 0. Пусть, не умаляя общности, она положительна: в противном случае можно домножить все числа на -1, и условие не изменится, а сумма станет положительной.

Пусть a — наименьшее из данных чисел. Тогда $a < S/2$, иначе $S \geqslant na > 2 \cdot S/2 = S$ — противоречие. Но тогда число a ближе к 0, чем к S: $|a| < |S - a|$, и поскольку $a \neq 0$, a не может делиться на $S - a$ (сумму всех остальных $n - 1$ чисел). Противоречие.

3. Дано натуральное $n \geqslant 3$. На плоскости отмечают n точек так, что не все они лежат на одной прямой. Найдите наименьшее возможное количество треугольников с вершинами в отмеченных точках.

Напомним, что вершины треугольника не лежат на одной прямой.

Saghafian M.

Ответ. $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Решение. *Пример.* Отметим $n - 1$ точек на одной прямой ℓ и точку A вне этой прямой. Тогда треугольник образуют в точности тройки вершин вида $\{A, X, Y\}$, где $\{X, Y\}$ — любая из C_{n-1}^2 пар отмеченных точек на прямой ℓ.

Оценка. Индукцией по n докажем, что количество треугольников не меньше, чем C_{n-1}^2.

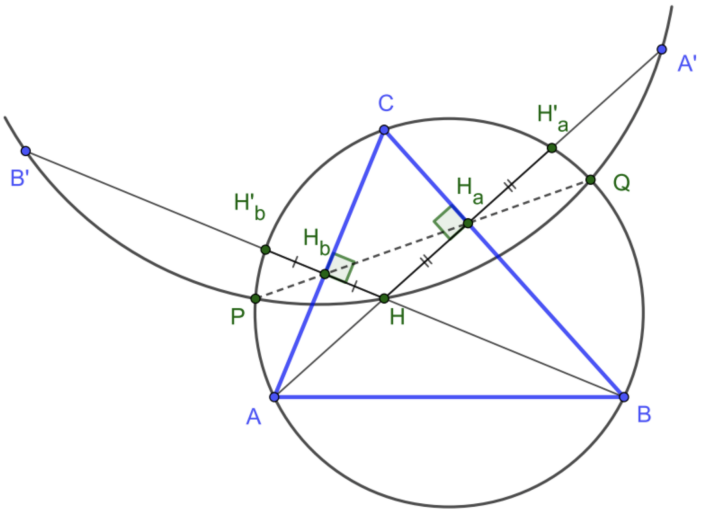
База $n = 3$ очевидна.

Переход $n \to n + 1$, где $n \geqslant 3$. Пусть $A_1, \ldots, A_{n+1}$ — данные отмеченные точки. Если среди них есть n лежащих на одной прямой, то, как показывает подсчет в примере, количество треугольников равно C_n^2. Иначе после удаления любой из отмеченных точек A_i получается множество M_i из n точек, не все из которых лежат на одной прямой. Применяя предположение индукции, получаем, что есть не менее C_{n-1}^2 треугольников с вершинами в этих n точках. Суммируя по всем $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, и учитывая, что каждый треугольник

$A_iA_jA_k$ посчитан в $n-2$ множествах (во всех, кроме M_i, M_j, M_k), получаем, что количество треугольников не меньше, чем $C_{n-1}^2 \cdot \frac{n+1}{n-2} = \frac{(n+1)(n-1)}{2} > \frac{n(n-1)}{2}$.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_a и BH_b. Прямая H_aH_b пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q. Точка A' симметрична точке A относительно BC, точка B' симметрична точке B относительно AC. Докажите, что точки A', B', P и Q лежат на одной окружности.

Кожевников П.А.



Решение. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Покажем, что прямая H_aH_b является радикальной осью окружностей (ABC) и $(HA'B')$. Отсюда будет следовать утверждение задачи, поскольку H_aH_b будет проходить через общие точки окружностей (ABC) и $(HA'B')$, или, эквивалентно, P и Q будут лежать на окружности $(HA'B')$.

Пусть точка H'_a симметрична точке H относительно BC. Степень точки H_a относительно окружности $(HA'B')$ равна $-HH_a \cdot H_aA'$, что, в силу симметрии, равно $-H'_aH_a \cdot H_aA$. Как известно, H'_a лежит на окружности (ABC), поэтому последнее выражение равно степени точки H_a относительно окружности (ABC). Таким образом, H_a имеет равные степени относительно окружностей (ABC) и $(HA'B')$, а значит лежит на их радикальной оси. То же верно для точки H_b, а значит, прямая H_aH_b и есть радикальная ось, что завершает решение.