VI Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 2

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Д. К. Мамий

П. А. Кожевников

Д. А. Белов

В. А. Брагин

Е. В. Бакаев

Л. А. Емельянов

Ч. Лейтем

С. А. Лучинин

М. Сагафиян

К. А. Сухов

А. А. Полянский

12–17 марта 2021 г.

г. Майкоп

Республика Адыгея

1. Юниоры **14 марта**

5. Натуральные числа a, b и c таковы, что произведение

$$\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, c) \cdot \text{НОД}(b, c)$$

является точным квадратом. Докажите, что произведение

$$\text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, c) \cdot \text{НОК}(b, c)$$

также является точным квадратом.

Saghafian M., Кожевников П.А.

Решение 1. Для каждой пары данных чисел воспользуемся известным равенством $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab$. Получим, что произведение двух произведений из условия задачи равно $(ab)(bc)(ca) = (abc)^2$. Поскольку дано, что одно из произведений — точный квадрат, то и другое — тоже.

Решение 2. Заметим, что число является точным квадратом тогда и только тогда, когда каждое простое число входит в его разложение в чётной степени. Пусть произвольное простое число p входит в разложение чисел a, b и c в степенях α, β, γ соответственно, при этом не умаляя общности считаем, что $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Тогда p входит в разложение чисел $\text{НОК}(a, b)$, $\text{НОК}(b, c)$, $\text{НОК}(c, a)$ соответственно в степенях β, γ, γ, а в произведение этих НОК — в степени $\beta + 2\gamma$. Аналогично, p входит в разложение чисел $\text{НОД}(a, b)$, $\text{НОД}(b, c)$, $\text{НОД}(c, a)$ соответственно в степенях α, β, α, а в произведение этих НОД — в степени $\beta + 2\alpha$. По условию $\beta + 2\alpha$ чётно, откуда β чётно, и значит $\beta + 2\gamma$ чётно. Проведя такие же рассуждения для всех p, получаем требуемое.

6. В ряд выложен 2021 шарик. Паша и Вова играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Паша. За каждый ход разрешается покрасить один из еще не покрашенных шариков в один из трёх цветов: красный, жёлтый или зелёный (в начале игры все шарики не покрашены). После того, как все шарики покрашены, победа присуждается Паше, если в ряду найдутся три подряд идущих шарика трёх разных цветов; иначе победа присуждается Вове. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Лучинин С.А.

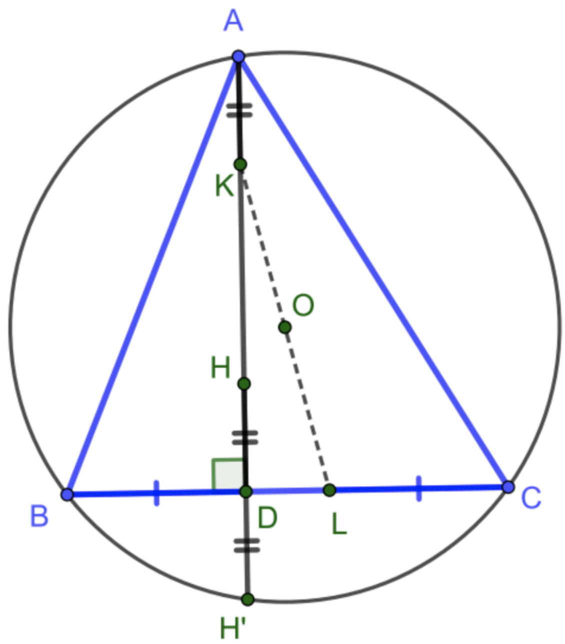
Ответ. Паша. **Решение.** Приведём одну из возможных выигрышных стратегий за Пашу. Пронумеруем шарики подряд числами от 1 до 2021. Первым ходом покрасим в красный цвет шарик номер 1011 (средний во всём ряду). Пусть Вова, не умаляя общности, свой ход сделал в левую половину. Тогда вторым ходом Паша красит в жёлтый цвет шарик с номером 1014.

Таким образом, Паша после своих двух первых ходов получил ситуацию К ◯ ◯ Ж. Если Вова покрасит один из двух шариков между покрашенными Пашей в красный или жёлтый цвет, то Паша сможет сразу докрасить оставшийся шарик в зелёный цвет так, чтобы образовалась тройка подряд идущих разноцветных. Если Вова покрасит один из двух шариков в зелёный, то Паша в ответ покрасит оставшийся шарик в красный цвет, и снова образуется разноцветная тройка лежащих подряд шариков.

Осталось заметить, что Паша может заставить Вову сделать ход между покрашенными первыми двумя ходами шариками. Сам Паша туда ходить не будет, и после покраски всех остальных шариков по чётности будет ход Вовы. Значит, Паша победит.

7. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AD, отмечены точка пересечения высот H и центр описанной окружности O. На отрезке AH нашлась точка K такая, что $AK = HD$, а на отрезке CD нашлась точка L такая, что $CL = DB$. Докажите, что прямая KL проходит через точку O.

Бакаев Е.В.



Решение. Докажем, что O — середина гипотенузы KL прямоугольного треугольника KDL. Для этого достаточно показать, что O лежит на серединных перпендикулярах к DL и DK.

Серединный перпендикуляр к DL совпадает с серединным перпендикуляром к BC, поэтому O на нём лежит.

Далее, пусть H' — точка, симметричная H относительно BC. Как известно, H' лежит на описанной окружности треугольника ABC. И, поскольку $H'D = HD = AK$, серединный перпендикуляр к DK совпадает с серединным перпендикуляром к AH', поэтому O на нём также лежит.

Замечание. Тот факт, что O лежит на серединном перпендикуляре к DK, можно доказывать и по-разному. Например, пользуясь тем, что расстояние от O до BC вдвое меньше AH (этот факт, в свою очередь, можно доказать, пользуясь тем, что O является ортоцентром серединного треугольника, который подобен ABC с коэффициентом $1/2$). Тем самым, получается, что расстояние от O до BC вдвое меньше KD.

8. Конечное множество натуральных чисел назовем *красивым*, если количество чисел в этом множестве равно их среднему арифметическому. Назовем число n *удивительным*, если множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно разбить на красивые подмножества.

(a) Докажите, что все точные квадраты удивительны.

(b) Докажите, что, к сожалению, существует бесконечно много натуральных чисел, не являющихся удивительными.

Saghafian M.

Решение. (a) Докажем, что число $n = k^2$ удивительное. Если $k = 1$, то даже разбивать не надо, само множество сразу красивое. Для $k > 1$ докажем, что существует разбиение множества $\{1, 2, \ldots k^2\}$ на два красивых подмножества. Сначала наберём подмножество будет размера $\frac{k(k-1)}{2}$ и таким же средним арифметическим.

Если $\frac{k(k-1)}{2}$ нечётное и равно $2t+1$, то можно взять числа от $t+1$ до $3t+1$. Легко видеть, что там, помимо числа $2t+1$, t пар чисел с полусуммой, равной $2t+1$. Также легко видеть, что $3t+1 \leqslant k^2$, поскольку $t = \frac{k^2-k-2}{4}$ и $3t+1 = \frac{3k^2-3k-2}{4}$.

Если $\frac{k(k-1)}{2}$ чётное и равно $2t$, то можно взять числа от t до $2t-1$ и от $2t+1$ до $3t$. Легко видеть, что здесь t пар, среднее в каждом из которых равно $2t$, кроме того, очевидно, что $3t < k^2$.

Итак, мы выбрали множество из $\frac{k(k-1)}{2}$ элементов и суммой $\frac{k^2(k-1)^2}{4}$. Остались невыбранными $\frac{k(k+1)}{2}$ чисел и их сумма

$$\frac{k^2(k^2+1)}{2} - \frac{k^2(k-1)^2}{4} = \frac{2k^4+2k^2-k^4+2k^3-k^2}{4} = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

То есть осталось тоже красивое подмножество.

(b) Докажем, что числа вида $4k+2$ не являются удивительными. Предположим, что $n = 4k+2$ удивительное число, то есть числа $\{1, 2, \ldots 4k+2\}$ удалось разбить на красивые множества. Обозначим размеры этих множеств $a_1, a_2, \ldots a_t$. Тогда суммы чисел в этих множествах равны $a_1^2, a_2^2, \ldots a_t^2$. Получаем два условия: $a_1 + \ldots + a_t = 4k+2$, и $a_1^2 + \ldots + a_t^2 = 1 + 2 + \ldots + (4k+2) = (2k+1)(4k+3)$. Получается, что сумма чисел $a_1, \ldots a_t$ и сумма их квадратов разной чётности. Но такого не может быть, так как a_i^2 такой же чётности как и a_i.

Замечание 1. Размеры множеств в пункте а) можно было найти, решая систему $a_1 + a_2 = k^2$ и $a_1^2 + a_2^2 = \frac{k^2(k^2+1)}{2}$.

Замечание 2. Первое красивое множество в пункте а) можно было явно и не предъявлять. Несложно понять, что сумма $\frac{k^2-k}{2}$ чисел из множества $\{1, \ldots k^2\}$ может принимать любое промежуточное значение между суммой чисел от 1 до $\frac{k(k-1)}{2}$ и от $k^2 - \frac{k(k-1)}{2} + 1$ до k^2. Для этого достаточно научиться последовательностью увеличений одного из элементов на 1 получать из подмножества наименьших чисел подмножество наибольших.

2. Сеньоры 14 марта

5. Дан треугольник со сторонами $a \leqslant b \leqslant c$. Известно, что из его высот нельзя составить треугольник. Докажите, что $b^2 > ac$.

Кожевников П.А.

Решение. Пусть S — площадь треугольника, тогда длины высот равны $h_a = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$, $h_c = \frac{2S}{c}$, при этом $h_a \geqslant h_b \geqslant h_c$.

Согласно условию, $h_a > h_b + h_c$, откуда

$$\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \tag{1}$$

Умножая (1) на неравенство треугольника $a + b > c$, имеем $1 + \frac{b}{a} > \frac{c}{b} + 1$, откуда $\frac{b}{a} > \frac{c}{b}$ и $b^2 > ac$.

Замечание. Из (1) вывести требуемое в условии можно разными путями. Например, из (1) следует неравенство $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b}$, которое, в свою очередь преобразуется к виду $b^2 > a(a+b)$, из которого, ввиду неравенства треугольника, далее следует требуемое $b^2 > ac$.

6. В ряд выложен 2021 шарик. Паша и Вова играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Паша. За каждый ход разрешается покрасить один из еще не покрашенных шариков в один из трёх цветов: красный, жёлтый или зелёный (в начале игры все шарики не покрашены). После того, как все шарики покрашены, победа присуждается Паше, если в ряду найдутся три подряд идущих шарика трёх разных цветов; иначе победа присуждается Вове. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Лучинин С.А.

Ответ. Паша. **Решение.** Приведём одну из возможных выигрышных стратегий за Пашу. Пронумеруем шарики подряд числами от 1 до 2021. Первым ходом покрасим в красный цвет шарик номер 1011 (средний во всём ряду). Пусть Вова, не умаляя общности, свой ход сделал в левую половину. Тогда вторым ходом Паша красит в жёлтый цвет шарик с номером 1014.

Таким образом, Паша после своих двух первых ходов получил ситуацию К ◯ ◯ Ж. Если Вова покрасит один из двух шариков между покрашенными

Пашей в красный или жёлтый цвет, то Паша сможет сразу докрасить оставшийся шарик в зелёный цвет так, чтобы образовалась тройка подряд идущих разноцветных. Если Вова покрасит один из двух шариков в зелёный, то Паша в ответ покрасит оставшийся шарик в красный цвет, и снова образуется разноцветная тройка лежащих подряд шариков.

Осталось заметить, что Паша может заставить Вову сделать ход между покрашенными первыми двумя ходами шариками. Сам Паша туда ходить не будет, и после покраски всех остальных шариков по чётности будет ход Вовы. Значит, Паша победит.

7. На плоскости лежат 4 фишки. Если фишки находятся в вершинах выпуклого четырёхугольника P, то разрешается выполнить такую операцию: выбрать одну из фишек и сдвинуть её перпендикулярно диагонали четырёхугольника P, соединяющей две другие фишки; при этом запрещается, чтобы в процессе движения фишка оказалась на одной прямой с двумя другими фишками.

Пусть изначально фишки находились в вершинах прямоугольника Π, а после выполнения нескольких операций они находились в вершинах прямоугольника Π', подобного Π, но не равного ему. Докажите, что прямоугольник Π является квадратом.

Бакаев Е.В.

Решение. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник с вершинами в фишках. Если, скажем, двигать вершину A вдоль перпендикуляра к BD, то разность квадратов $AB^2 - DA^2$ не изменяется. Поэтому, при выполнении любой разрешённой операции величина $f(ABCD) = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$ не меняется.

Если $A'B'C'D'$ подобен $ABCD$ с коэффициентом k, то $f(A'B'C'D') = \pm k^2 \cdot f(ABCD)$. Значит, при выполнении условия задачи $f(\Pi) = 0$. Для завершения решения остаётся заметить, что для любого прямоугольника Π, отличного от квадрата, $f(\Pi) \neq 0$.

Замечание. Отметим, что условие $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 0$, как известно, эквивалентно перпендикулярности $AC \perp BD$.

Вместо инварианта f, используемого в решении, можно использовать некоторые другие (связанные с f) инварианты, например, скалярное произведение $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

8. Дана бесконечная таблица, строки и столбцы которой занумерованы натуральными числами. Для последовательности функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... в ячейку (i, j) таблицы запишем число $f_i(j)$ (для всех i, $j \in \mathbb{N}$). Последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... назовём *красивой*, если все числа в таблице — натуральные, и при этом каждое натуральное число встречается в таблице ровно один раз. Существует ли красивая последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, в которой каждая функция $f_i(x)$ является многочленом степени 101 с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1?

Кожевников П.А.

Ответ. Существует.

Решение. Назовем возрастающую последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ *реализуемой*, если $a_i = f(i)$ при всех $i = 1,\ 2,\ \ldots$ для некоторого (реализующего) многочлена $f(x)$ степени 101 с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1. Покажем, что $\mathbb{N}$ можно представить в виде объединения (бесконечного количества) попарно непересекающихся реализуемых последовательностей; отсюда и последует положительный ответ на вопрос задачи.

Заметим, что сдвиг реализуемой последовательности a_1, a_2, a_3, $\ldots$ (т. е. последовательность $a_1 + c$, $a_2 + c$, $a_3 + c$, $\ldots$ для некоторого целого числа c) также является реализуемой последовательностью: она задаётся многочленом $f(x) + c$, где f — реализующий многочлен для последовательности a_1, a_2, $\ldots$. Также «хвост» a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, $\ldots$ реализуемой последовательности a_1, a_2, a_3, $\ldots$ — реализуемая последовательность: она задается многочленом $f(x+k-1)$ (очевидно, этот многочлен, как и $f(x)$, имеет степень 101, целые коэффициенты, и его старший коэффициент равен 1).

Лемма. Предположим, что для возрастающей последовательности целых чисел $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ выполнено $0 < a_2 - a_1 < a_3 - a_2 < a_4 - a_3 < \ldots$. Тогда $\mathbb{N}$ можно разбить на бесконечное количество попарно непересекающихся последовательностей, каждая из которых — некоторый хвост сдвига последовательности A.

Доказательство. Заменяя последовательность A на ее сдвиг, будем считать, что $a_1 = 0$. Обозначим A_c сдвиг A на c, т. е. последовательность $a_1 + c$, $a_2 + c$, $a_3 + c$, $\ldots$. Для каждой A_c вычеркнем из неё каждый член $a_i + c$, который больше a_{i+1}. Тогда после вычеркивания в A_c останутся только члены $a_i + c$, где $a_{i+1} - a_i \geqslant c$, в силу условия $0 < a_2 - a_1 < a_3 - a_2 < a_4 - a_3 < \ldots$, это будет хвост последовательности A_c. Но все эти хвосты покрывают $\mathbb{N}$. Действительно, рассмотрим натуральные числа из промежутка $a_i + 1$, $a_i + 2$, $\ldots$, a_{i+1}: по построению каждое из них принадлежит ровно одному хвосту. Лемма доказана.

Ввиду леммы, теперь нам достаточно указать хотя бы одну реализуемую последовательность с условием $0 < a_2 - a_1 < a_3 - a_2 < a_4 - a_3 < \ldots$. Таковой, очевидно, является, последовательность $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\ldots$, где $f(x) = x^{101}$.