VII Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 2

Д. К. Мамий
П. А. Кожевников
А. В. Антропов
Д. А. Белов
В. А. Брагин
Е. В. Бакаев
Л. А. Емельянов
И. А. Кухарчук
К. А. Сухов
М. Сагафиян
А. А. Полянский

11–16 марта 2022 г.
г. Майкоп
Республика Адыгея

1. Юниоры **14 марта**

5. Найдите количество решений (x, y, z) уравнения $x + y = 10z$, где x, y, z — шестизначные натуральные числа, запись которых состоит только из нечётных цифр.

Кожевников П.А.

Ответ. $5 \cdot 15^5 = 3\,796\,875$ **Решение.** Посмотрим, при каких условиях на x, y (кроме того, что они состоят из нечётных цифр), чтобы выполнялось условие на z. Во-первых, последние цифры должны в сумме давать 10, то есть подходят пары 1-9, 3-7, 5-5, 7-3 и 9-1. Во-вторых, в каждом из остальных разрядов обязательно должен произойти переход через разряд, чтобы следующая цифра была нечётной. Под это условие подходят пары 1-9, 3-7, 3-9, 5-5, 5-7, 5-9, 7-3, 7-5, 7-7, 7-9, 9-1, 9-3, 9-5, 9-7, 9-9 — всего 15 пар. Таким образом, последние цифры выбираются 5-ю способами, а каждая пара остальных — 15-ю способами. Значит, подходящих пар (x, y) всего $5 \cdot 15^5 = 3\,796\,875$, и каждой паре соответствует ровно одна тройка, поэтому троек столько же.

6. 16 команд Национальной Хоккейной Лиги в первом раунде плей-офф разбиваются на 8 пар и играют друг с другом серии до четырёх побед (таким образом, счёт в серии может быть 4-0, 4-1, 4-2 или 4-3). После каждого раунда команды, победившие в своих парах, снова разбиваются на пары, а проигравшие команды больше не принимают участие в турнире. После четвёртого финального раунда оказалось, что ровно у k команд суммарное количество побед во все играх не меньше, чем количество поражений (например, под условие подходит команда, победившая в первом раунде со счётом 4-2 и проигравшая во втором со счётом 4-3: у неё $4+3 = 7$ побед и $2 + 4 = 6$ поражений). Найдите наименьшее возможное значение k.

Кожевников П.А.

Ответ. 2.

Решение. *Пример.* Устроим турнир так, что в первом раунде все серии закончились со счётом $4 - 3$, во втором раунде все серии закончились со счётом $4 - 2$, а в третьем — со счётом $4 - 0$. Тогда у всех, кто вылетел до финала побед меньше, чем поражений, а у финалистов на момент выхода в финал побед на 7 больше, поэтому при любом исходе финальной серии поражений больше стать не может.

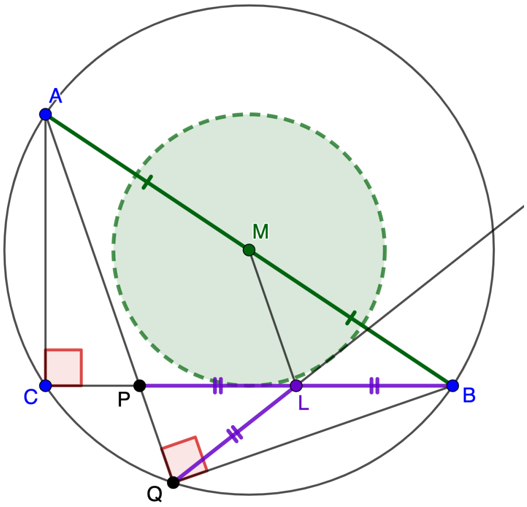
Оценка. Заметим, что команда, которая выиграет турнир, выиграет все серии, поэтому побед у неё будет больше. Предположим, что у команды, занявшей второе место поражений больше, чем побед. Но эта команда выиграла три серии на пути к финалу, то есть к этому моменту разность побед и поражений хотя бы 3, а в финале разность уменьшилась не более чем на 4.

Единственный шанс второму месту иметь отрицательную разность — это выиграть все серии до финала с перевесом в одну победу, а финал проиграть $0-4$. Но тогда у команды, которую она выбила в полуфинале, было две выигранных серии, и одна проигранная со счётом $3-4$, поэтому у этой команды побед больше, чем поражений.

7. На катете CB прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$) выбирается точка P. Прямая AP пересекает окружность, описанную около треугольника, ABC в точке Q. Пусть L — середина PB. Докажите, что QL касается фиксированной окружности, не зависящей от выбора точки P.

Кухарчук И.А.

Решение. Заметим, что $\angle PQB = \angle ACB = 90°$. Поскольку L — середина гипотенузы в прямоугольном треугольнике PQB, имеем $PL = LQ$. Откуда $\angle LPQ = \angle LQP$.



Пусть M — середина AB. В силу того, что ML средняя линяя треугольника ABP, получаем $ML \parallel PQ$. Тогда $\angle MLP = \angle MLN$, где N произвольная точка на продолжении отрезка QL за точку L.

Значит точка M равноудалена от сторон угла CLN. Тогда прямая QL касается окружности с центром в M и радиусом, равным расстоянию от M до прямой BC.

8. Паша собирается написать многочлен $(x+1)^n$, раскрыть все скобки и привести подобные слагаемые, после чего заменить каждый коэффициент на обратный. Например, при $n = 3$ Паша получит сначала $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$, а затем после замены $x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 1$. Докажите, что Паша может выбрать такое n, что сумма всех коэффициентов итогового многочлена, включая старший и свободный, будет меньше 2,022.

Saghafian M.

Решение. Значение многочлены в точке 1 — сумма коэффициентов. Старший коэффициент и свободный член многочлена равны 1. Поэтому нужно добиться, чтобы сумма остальных коэффициентов была меньше $0,022$. Коэффициент при x^k у многочлена $(x+1)^n$ равен $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Тогда в Пашином многочлене этот коэффициент равен $\frac{k!(n-k)!}{n!}$. Обозначим это выражение a_k

Как меняется это выражение при увеличении k на 1? Числитель умножается на $k+1$, делится на $(n-k)$, поэтому для $k \leqslant \frac{n-1}{2}$ выражение будет уменьшаться, а затем увеличиваться.

Рассмотрим коэффициенты $a_2, a_3, \ldots a_{n-2}$. Они не превосходят a_2. При $n \geqslant 1001$ $a_2 = \frac{2}{n(n-1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \leqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{500}$. То есть при $n \geqslant 1001$ сумма $a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} \leqslant (n-3) \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{500} < \frac{1}{500}$. Таким образом,

$$a_1 + a_n + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} \leqslant \frac{2}{n} + \frac{1}{500} < \frac{2}{1000} + \frac{1}{500} < \frac{22}{1000}.$$

Значит $n = 1001$ подходит.

2. Сеньоры 13 марта

5. 16 команд Национальной Хоккейной Лиги в первом раунде плей-офф разбиваются на 8 пар и играют друг с другом серии до четырёх побед (таким образом, счёт в серии может быть 4-0, 4-1, 4-2 или 4-3). После каждого раунда команды, победившие в своих парах, снова разбиваются на пары, а проигравшие команды больше не принимают участие в турнире. После четвёртого финального раунда оказалось, что ровно у k команд суммарное количество побед во все играх не меньше, чем количество поражений (например, под условие подходит команда, победившая в первом раунде со счётом 4-2 и проигравшая во втором со счётом 4-3: у неё $4{+}3 = 7$ побед и $2 + 4 = 6$ поражений). Найдите наименьшее возможное значение k.

Кожевников П.А.

Ответ. 2.

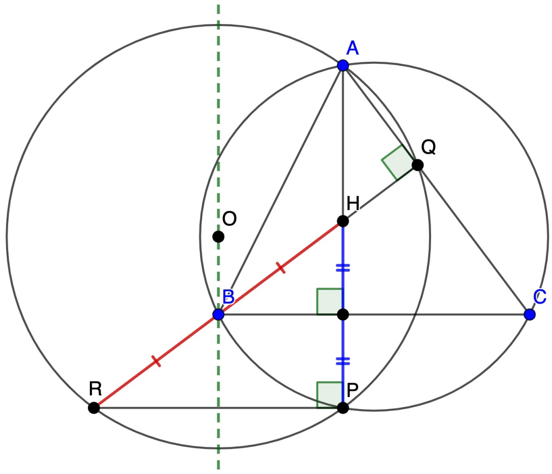
Решение. *Пример.* Устроим турнир так, что в первом раунде все серии закончились со счётом $4 - 3$, во втором раунде все серии закончились со счётом $4 - 2$, а в третьем — со счётом $4 - 0$. Тогда у всех, кто вылетел до финала побед меньше, чем поражений, а у финалистов на момент выхода в финал побед на 7 больше, поэтому при любом исходе финальной серии поражений больше стать не может.

Оценка. Заметим, что команда, которая выиграет турнир, выиграет все серии, поэтому побед у неё будет больше. Предположим, что у команды, занявшей второе место поражений больше, чем побед. Но эта команда выиграла три серии на пути к финалу, то есть к этому моменту разность побед и поражений хотя бы 3, а в финале разность уменьшилась не более чем на 4. Единственный шанс второму месту иметь отрицательную разность — это выиграть все серии до финала с перевесом в одну победу, а финал проиграть $0 - 4$. Но тогда у команды, которую она выбила в полуфинале, было две выигранных серии, и одна проигранная со счётом $3 - 4$, поэтому у этой команды побед больше, чем поражений.

6. Дан остроугольный треугольник ABC. Точка P выбрана на окружности (ABC), а точка Q — на отрезке AC так, что $AP \perp BC$ и $BQ \perp AC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника APQ. Найдите угол OBC.

Фролов И.И.

Ответ. $\angle OBC = 90^\circ$.



Решение. Пусть H точка пересечения высот треугольника ABC, R —- симметрия точки H относительно точки B.

Применим следующее известное утверждение: симметрия точки пересечения высот треугольника отностиельно одной из его сторон лежит на описанной около этого треугольника окружности. Откуда получаем, что точки H и P симметричны относительно BC. Тогда прямая BC проходит через середины отрезков HR и HP, следовательно $BC \parallel RP$. Откуда $\angle APR = 90^\circ$ и точки A, Q, P и R лежат на одной окружности. Тогда O лежит на серединном перпендикуляре к RP.

С другой стороны, серединный перпендикуляр к RP параллелен HP и проходит через середину RP, значит он —- средняя линяя треугольника HPR. Таким образом, точка B, как середина RH, лежит на этом перпендикуляре, откуда $OB \perp RP$. Учитывая $BC \parallel RP$, получаем $OB \perp BC$ и находим $\angle OBC = 90^\circ$, что и требовалось.

7. Паша собирается написать многочлен $(x+1)^n$, раскрыть все скобки и привести подобные слагаемые, после чего заменить каждый коэффициент на обратный. Например, при $n = 3$ Паша получит сначала $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$, а затем после замены $x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 1$. Докажите, что Паша может выбрать такое n, что сумма всех коэффициентов итогового многочлена, включая старший и свободный, будет меньше 2,022.

Saghafian M.

Решение. Значение многочлены в точке 1 — сумма коэффициентов. Старший коэффициент и свободный член многочлена равны 1. Поэтому нужно добиться, чтобы сумма остальных коэффициентов была меньше $0,022$. Коэффициент при x^k у многочлена $(x+1)^n$ равен $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Тогда в Пашином многочлене этот коэффициент равен $\frac{k!(n-k)!}{n!}$. Обозначим это выражение a_k

Как меняется это выражение при увеличении k на 1? Числитель умножается на $k+1$, делится на $(n-k)$, поэтому для $k \leqslant \frac{n-1}{2}$ выражение будет уменьшаться, а затем увеличиваться.

Рассмотрим коэффициенты $a_2, a_3, \ldots a_{n-2}$. Они не превосходят a_2. При $n \geqslant 1001$ $a_2 = \frac{2}{n(n-1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \leqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{500}$. То есть при $n \geqslant 1001$ сумма $a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} \leqslant (n-3) \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{500} < \frac{1}{500}$. Таким образом,

$$a_1 + a_n + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} \leqslant \frac{2}{n} + \frac{1}{500} < \frac{2}{1000} + \frac{1}{500} < \frac{22}{1000}.$$

Значит $n = 1001$ подходит.

8. В стране $n > 2022$ городов. Некоторые пары городов соединены прямыми двухсторонними авиалиниями. Назовём набор городов *неудачным*, если все авиалинии между ними нельзя раскрасить в два цвета так, чтобы не было одноцветных треугольников (то есть трёх городов, попарно соединённых авиалиниями одного цвета).

Оказалось, что набор из всех городов неудачный. Обязательно ли есть неудачный набор из 2022 городов?

Дёмин Д.

Ответ. Нет, не всегда.

Решение. Пусть страна состоит из 2023 регионов, а в каждом регионе по 5 городов. Будем обозначать i-ый регион R_i, а j-ый город i-ого региона c_i^j. Пусть каждые два города одного региона соединены авиарейсом. Между регионами с соседними номерами R_i и R_{i+1} проведём рейсы между городами с разными номерами внутри своих регионов, то есть между c_i^j и c_{i+1}^k, где $j \neq k$. Между R_1 и R_{2023} проведём все рёбра, кроме $c_1^1 c_{2023}^1$, $c_1^2 c_{2023}^2$, $c_1^3 c_{2023}^4$, $c_1^4 c_{2023}^5$, $c_1^5 c_{2023}^3$. Между остальными регионами рёбра не проводим.

Сначала заметим, что для любых пяти городов попарно соединённых авиарейсами, в любой правильной раскраске из каждого города ведёт ровно по два рейса каждой авиакомпании. Действительно, иначе можно было бы найти город u, из которого ведёт три авиарейса одной компании в города x, y, z, тогда среди рейсов xy, yz и zx не могут быть все рейсы одной компании, значит один из них той же компании, что и рейсы ux, uy, uz. Не умаляя общности это рейс xy, тогда рейсы xy, ux, uy соединяют три города и принадлежат одной компании, противоречие.

Теперь покажем, что для шести городов a, b, c, d, x, y таких, что соединены все, кроме xy, для любого правильного распределения рейсов для пятёрок $abcdx$ и $abcdy$ их распределения совпадают. В пятёрке $abcdx$ из x выходит два рейса первой и два рейса второй компании (допустим в a, b и c, d соответственно), тогда в четвёрке $abcd$ из a, b выходит по два рейса второй компании, а из c, d выходит по два рейса первой, а значит ay, by должны быть рейсами первой компании, а cy, dy рейсами второй компании.

Рассмотрим правильную раскраску рёбер $R_i \cup R_{i+1}$. Если посмотреть на последовательность пятёрок городов $c_i^1 c_i^2 c_i^3 c_i^4 c_i^5$, $c_{i+1}^1 c_i^2 c_i^3 c_i^4 c_i^5$, $c_{i+1}^1 c_{i+1}^2 c_i^3 c_i^4 c_i^5$,

$c^1_{i+1}c^2_{i+1}c^3_{i+1}c^4_i c^5_i$, $c^1_{i+1}c^2_{i+1}c^3_{i+1}c^4_{i+1}c^5_i$, $c^1_{i+1}c^2_{i+1}c^3_{i+1}c^4_{i+1}c^5_{i+1}$, то ясно, что распределения городов между компаниями в любых двух пятёрках совпадают, а значит совпадают и для R_i и R_{i+1}.

Допустим для приведённого примера городов и рейсов между ними существует правильное распределение. Тогда, для всех пар R_i и R_{i+1} совпадают распределения рейсов (если смотреть в порядке $c^1_i c^2_i c^3_i c^4_i c^5_i$). По тем же причинам распределения для пятёрок $c^1_1 c^2_1 c^5_1 c^3_1 c^4_1$ и $c^1_{2023}c^2_{2023}c^3_{2023}c^4_{2023}c^5_{2023}$ (именно в таком порядке). Тогда, так как для всех R_i и R_{i+1} распределения совпадают, то и для R_1 и R_{2023} они совпадают. А значит совпадают распределения между компаниями для $c^1_1 c^2_1 c^3_1 c^4_1 c^5_1$ и $c^1_1 c^2_1 c^5_1 c^3_1 c^4_1$. Тогда рейсы $c^5_1 c^3_1$, $c^3_1 c^4_1$ и $c^4_1 c^5_1$ принадлежат одной компании, противоречие с тем, что распределение правильное.

Если закрыты все города, кроме 2022, то какой-то в каком-то регионе закрыты все города. Тогда достаточно показать, что существует правильное распределение, если полностью закрыт один регион, потому что, если для некоторого набора городов существовало правильное распределение, то и после закрытия некоторых из них оно так же будет существовать. Если закрыт R_k, то обозначим через S^i такой набор городов: все c^i_j для $1 \leqslant j < k$ и c^i_j при $i = 1, 2$, c^{i-1}_j при $i = 4, 5$, c^5_j при $i = 3$ для $k < j \leqslant 2023$. Тогда города R_j и R_{j+1} соединены тогда и только тогда, когда они принадлежат разным S^i.

Давайте отдадим рейсы между S^1S^2, S^2S^3, S^3S^4, S^4S^5 и S^5S^1 первой авиакомпании, а рейсы между S^1S^3, S^3S^5, S^5S^2, S^2S^4 и S^4S^1 второй авиакомпании (S^i считаются для новой нумерации). Тогда, если в тройке городов есть два из S^i, то между ними нет рейса, значит эта тройка не может нарушать правильности распределения. Среди любых трёх городов, в которых нет двух из одного S^i, найдётся пара из S^1S^2, S^2S^3, S^3S^4, S^4S^5 или S^5S^1, и найдётся пара из S^1S^3, S^3S^5, S^5S^2, S^2S^4 или S^4S^1, поэтому эти три города не могут быть соединены рейсами одной авиакомпании.