

Юниоры. Второй день 11 марта

5. Егор заполнил таблицу $1 \times n$ целыми числами, среди которых нет равных. Могло ли так оказаться, что при любом $k = 1, 2, \dots, n$ можно найти прямоугольник $1 \times k$, в котором сумма чисел равна 0 для

- а) $n = 11$;
- б) $n = 12$?

6. Натуральные числа a, b, c таковы, что

$$\text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = \text{НОД}(a, c) + \text{НОК}(a, c).$$

Верно ли, что тогда обязательно $b = c$?

7. У Саши есть 10 карточек с числами $1, 2, 4, 8, \dots, 512$. Он пишет на доске число 0 и предлагает Диме сыграть в игру. Дима своим ходом называет целое число $0 < p < 10$, это число может быть разным от раунда к раунду. Саша выбирает p карточек, перед которыми ставит знак «+», а перед остальными карточками ставит знак «−». Результат вычисляется и прибавляется к числу на доске. Какой наибольший по модулю результат через несколько раундов может получить Дима, как бы ни действовал Саша?

8. Пусть ABC — равносторонний треугольник с длиной стороны $a + b + c$. На стороне AB треугольника ABC взяты точки C_1 и C_2 , на стороне BC — точки A_1 и A_2 , на стороне CA — точки B_1 и B_2 так, что $A_1A_2 = CB_1 = BC_2 = a$, $B_1B_2 = AC_1 = CA_2 = b$, $C_1C_2 = BA_1 = AB_2 = c$. Пусть точка A' такова, что треугольник $A'B_2C_1$ — равносторонний, а точки A и A' лежат по разные стороны от прямой B_2C_1 . Аналогично строятся точки B' и C' (треугольник $B'C_2A_1$ — равносторонний, а точки B и B' лежат по разные стороны от прямой C_2A_1 ; треугольник $C'A_2B_1$ — равносторонний, а точки C и C' лежат по разные стороны от прямой A_2B_1). Докажите, что треугольник $A'B'C'$ — равносторонний.

Сеньоры. Второй день 11 марта

5. Натуральные числа a , b , c таковы, что

$$\text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = \text{НОД}(a, c) + \text{НОК}(a, c).$$

Верно ли, что тогда обязательно $b = c$?

6. Дано натуральное $n \leq 100$. Заяц записал в клетки таблицы 100×100 вещественные числа. За один вопрос Волк может узнать сумму чисел в любом клетчатом квадрате $n \times n$ или в любом клетчатом прямоугольнике $1 \times (n - 1)$ (или $(n - 1) \times 1$). При каком наибольшем n Волк за несколько вопросов может гарантированно узнать значения чисел во всех клетках?

7. Числа $1, 2, \dots, n$ написаны на доске. За один ход можно стереть два числа a и b и вместо них записать число $a^2 - b$. Найдите все n , для которых после $n - 1$ хода можно получить число 0.

8. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 . На отрезках AA_1 , BB_1 , CC_1 отметили соответственно точки A' , B' , C' так, что $\angle BA'C = \angle AC'B = \angle CB'A = 90^\circ$. Отрезки AC' и CA' пересекаются в точке B'' , отрезки CB' и BC' — в точке A'' , отрезки BA' и AB' — в точке C'' . Докажите, что в шестиугольник $A'B''C'A''B'C''$ можно вписать окружность.