VII Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 11–16 марта 2022 года

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Юниоры. Первый день

12 марта

1. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$, а число $b^2 - a - c + 1$ — простое. Докажите, что a и c — удвоенные квадраты натуральных чисел.

2. В параллелограмме $ABCD$ на отрезках AD и CD выбраны точки E и F соответственно. Известно, что $\angle BCE = \angle BAF$. На отрезках AD и CD выбраны точки K и L так, что $AK = ED$ и $CL = FD$. Докажите, что $\angle BKD = \angle BLD$.

3. Петя написал 21 различное натуральное число, каждое не превосходит $1\,000\,000$. Для каждой пары (a, b) чисел, написанных Петей, Коля написал на своей бумажке число

$$F(a; b) = a + b - \text{НОД}(a; b).$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел, написанных Колей, не было ранее написано Петей.

4. Можно ли отметить на плоскости 2021 точку с целыми координатами так, чтобы попарные расстояния между точками оказались различными последовательными целыми числами?

VII Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 11–16 марта 2022 года

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Сеньоры. Первый день

12 марта

1. В прямоугольной таблице две строки и 100 столбцов. Дима заполнил клетки верхней строк числами 1, 2 или 3. Докажите, что Саша может заполнить клетки нижней строку числами 1, 2 или 3 так, чтобы числа в любом столбце были разными, а сумма чисел во второй строке была равна 200.

2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, представимых в виде $\frac{a-1}{b}+\frac{b-1}{c}+\frac{c-1}{a}$, где a, b, c — попарно различные натуральные числа, большие 1.

3. Существуют ли 100 точек на плоскости такие, что попарные расстояния между ними — попарно различные последовательные целые числа, большие 2022?

4. Окружность ω касается сторон острого угла с вершиной A в точках B и C. Пусть D — произвольная точка на большей дуге BC окружности ω. Внутри угла DAC выбраны точки E и F так, что четырёхугольники $ABDF$ и $ACED$ — вписанные, а точки A, E, F лежат на одной прямой. Докажите, что прямые BE и CF пересекаются на ω.