VII Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 1

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Д. К. Мамий
П. А. Кожевников
А. В. Антропов
Д. А. Белов
В. А. Брагин
Е. В. Бакаев
Л. А. Емельянов
И. А. Кухарчук
К. А. Сухов
М. Сагафиян
А. А. Полянский

11–16 марта 2022 г.
г. Майкоп
Республика Адыгея

1. Юниоры **12 марта**

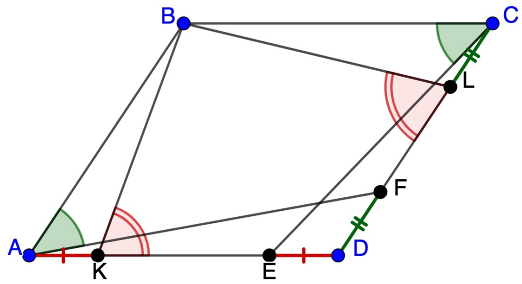
1. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$, а число $b^2 - a - c + 1$ — простое. Докажите, что a и c — удвоенные квадраты натуральных чисел.

Антропов А.В, Белов Д.А.

Решение. Из первого условия следует $b^2 = ac$. Подставим во второе условие, получим $ac - a - c + 1 = (a-1)(c-1)$ — простое. При натуральных a и c это возможно только тогда, когда одна из скобок равна 1. Пусть, не умаляя общности, $a - 1 = 1$, тогда $a = 2$ и $b^2 = ac = 2c$. Тогда $b = 2k$ при некотором натуральном k, и $c = 2k^2$. Значит, и $a = 2$, и $c = 2k^2$ — удвоенные квадраты натуральных чисел, что и требовалось.

2. В параллелограмме $ABCD$ на отрезках AD и CD выбраны точки E и F соответственно. Известно, что $\angle BCE = \angle BAF$. На отрезках AD и CD выбраны точки K и L так, что $AK = ED$ и $CL = FD$. Докажите, что $\angle BKD = \angle BLD$.

Кухарчук И.А.



Решение. В силу $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$ имеем $\angle AFD = \angle BAF = \angle BCE = \angle CED$. Значит, треугольники AFD и CED подобны по двум углам. Откуда, используя равенства $AK = ED$ и $CL = FD$, получаем $\frac{AK}{CL} = \frac{ED}{FD} = \frac{DC}{AD}$.

Из того, что $ABCD$ параллелограмм имеем $AB = CD$, $BC = AD$ и $\angle BAK = \angle BCL$. Тогда $\frac{AK}{CL} = \frac{DC}{AD} = \frac{AB}{BC}$, следовательно треугольники BAK и BCL по углу и отношению прилежащих к нему сторон. Значит, $\angle BKA = \angle BLC$, откуда $\angle BKD = \angle BLD$, как смежные с равными, что и требовалось.

3. Петя написал 21 различное натуральное число, каждое не превосходит 1 000 000. Для каждой пары (a, b) чисел, написанных Петей, Коля написал на своей бумажке число

$$F(a; b) = a + b - \text{НОД}(a; b).$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел, написанных Колей, не было ранее написано Петей.

Агаханов Н.Х.

Решение. Обозначим и упорядочим числа, написанные Петей:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{21}.$$

Будем рассуждать от противного. Рассмотрим $F(a_{20}; a_{21})$. Из неравенства НОД$(a; b) \leqslant \min(a; b)$ следует, что

$$F(a_{20}, a_{21}) = a_{20} + a_{21} - \text{НОД}(a_{20}; a_{21}) \geqslant a_{20} + a_{21} - a_{20} = a_{21}.$$

Значит, если $F(a_{20}; a_{21})$ выписано Колей, то оно может быть равно только a_{21}. Но в таком случае НОД$(a_{20}; a_{21}) = a_{20}$, а число a_{21} делится на a_{20}.

Докажем, что это же условие выполнено для любой пары чисел с соседними индексами. Предположим, что (a_k, a_{k+1}) — пара с наибольшими индексами, не подходящая под условие. Так как a_{k+1} не делится на a_k, то НОК$(a_k; a_{k+1}) < a_k$, значит, $F(a_k; a_{k+1}) > a_{k+1}$. С другой стороны,

$$F(a_k; a_{k+1}) = a_k + a_{k+1} - \text{НОД}(a_k; a_{k+1}) < a_k + a_{k+1} < 2a_{k+1} \leqslant a_{k+2},$$

где последнее неравенство выполнено, так как для пары (a_{k+1}, a_{k+2}) условие, что большее число делится на меньшее, выполнялось, а значит a_{k+2} хотя бы вдвое больше, чем a_{k+1}. Таким образом,

$$a_{k+1} < F(a_k; a_{k+1}) < a_{k+2},$$

и мы нашли число Коли, которое не написал Петя, противоречие.

Итак, мы доказали, что каждое следующее число делится на предыдущее, и так как числа различные, получаем, что каждое следующее число хотя бы в два раза больше. Но тогда $a_{21} \geqslant 2^{20} > 1\,000\,000$, противоречие.

4. Можно ли отметить на плоскости 2021 точку с целыми координатами так, чтобы попарные расстояния между точками оказались различными последовательными целыми числами?

Saghafian M.

Ответ. Нет, нельзя. **Решение.** Предположим противное. Количество попарных расстояний равно $\frac{2021 \cdot 2020}{2} = 2\,041\,210$. Если все они — последовательные целые числа, то их можно разбить на $1\,020\,605$ пар с нечётной суммой. Тогда сумма всех попарных расстояний будет нечётной.

С другой стороны, пусть x точек имеют нечётную сумму координат и $2021 - x$ — чётную. Докажем, что нечётными будут в точности расстояния между точками с суммой координат разной чётности. Пусть одна точка имеет координаты (x_1, y_1), а вторая — (x_2, y_2). Рассмотрим разности $x_1 - x_2$ и $y_1 - y_2$. Одна из них будет нечётной, а другая — чётной тогда и только тогда, когда сумма $x_1 - x_2 + y_1 - y_2$ — нечётная. Это и означает, что суммы координат точек имеют разную чётность.

Таким образом, нечётных расстояний всего $x \cdot (2021 - x)$, что является чётным при любом целом x. Но тогда и сумма всех расстояний должна быть чётной, противоречие.

2. Сеньоры 13 марта

1. В прямоугольной таблице две строки и 100 столбцов. Дима заполнил клетки верхней строк числами 1, 2 или 3. Докажите, что Саша может заполнить клетки нижней строку числами 1, 2 или 3 так, чтобы числа в любом столбце были разными, а сумма чисел во второй строке была равна 200.

Saghafian M.

Решение. Если в первой строке двоек $2k$, то под всеми 1 и 3 можно написать два, под половиной двоек единицы, под k двойками написать 1, а под другими двойками написать 3. Тогда среднее арифметическое написанных во второй строке чисел будет равно 2. Если же двоек в первой строке $2k+1$ двоек, то в ней есть и не двойки. Без ограничения общности можно считать, что есть единица. Напишем под ней 3, под остальными 1 и 3 напишем 2. Под k двойками напишем 3, под $k+1$-ой двойкой напишем 1. Тогда во второй строке поровну единиц и троек, поэтому среднее арифметическое опять равно 2, то есть сумма равна 200.

2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, представимых в виде $\frac{a-1}{b}+\frac{b-1}{c}+\frac{c-1}{a}$, где a, b, c — попарно различные натуральные числа, большие 1.

Емельянов Л.А., Кухарчук И.А.

Решение. Рассмотрим тройки вида $a = 12k + 2$, $b = 6k + 1$, $c = 3$. Тогда указанное выражение равно $\dfrac{12k+1}{6k+1} + \dfrac{6k}{3} + \dfrac{2}{12k+2} = 2k + 2$. Получается, что все чётные числа, большие двух, точно представимы в таком виде, а их бесконечное число.

3. Существуют ли 100 точек на плоскости такие, что попарные расстояния между ними — попарно различные последовательные целые числа, большие 2022?

Saghafian M., Брагин В.А.

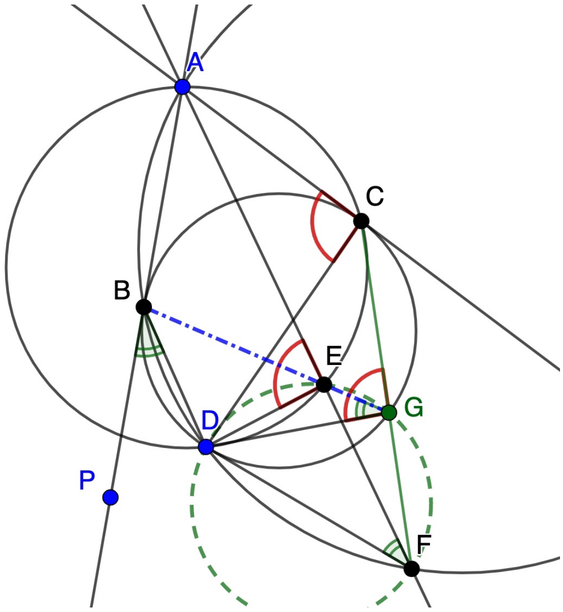
Ответ. Не существуют.

Решение. Предположим противное. Тогда расстояния между точками $n+1$, $n+2$, $\ldots n+4950$. Разместим в каждой точке круг радиусом $\frac{n}{2}$. Эти круги попарно не пересекаются. С другой стороны, рассмотрим две точки, расстояние между которыми максимально: A и B. Тогда все точки находятся внутри круга радиусом $n + 4950$ с центром A. Значит все круги находятся внутри круга радиуса $\frac{3n}{2} + 4950$ с центром A. Поэтому суммарная площадь маленьких кругов не более площади этого большого. Получаем неравенство $\pi\left(\frac{3n}{2}+4950\right)^2 \geqslant 100\cdot\pi\cdot\frac{n^2}{4}$. После преобразований имеем $(3n+9900)^2 \geqslant 100n^2$ или $9900 \geqslant 7n$, что неверно, так как $n \geqslant 2022$.

4. Окружность ω касается сторон острого угла с вершиной A в точках B и C. Пусть D — произвольная точка на большей дуге BC окружности ω. Внутри угла DAC выбраны точки E и F так, что четырёхугольники $ABDF$ и $ACED$ — вписанные, а точки A, E, F лежат на одной прямой. Докажите, что прямые BE и CF пересекаются на ω.

Кухарчук И.А.

Решение. Пусть CF вторично пересекает ω в точке G. Тогда в силу того, что четырехугольник $ACED$ вписанный и AC касается ω имеем равенства: $\angle AED = \angle ACD = \angle CGD$. Следовательно $\angle DEF = 180^\circ - \angle AED = 180^\circ - \angle CGD = \angle DGF$, откуда четырехугольник $DEGF$ — вписанный.



Пусть P — произвольная точка на продолжении отрезка AB за точку B. Тогда в силу того, что четырехугольники $DEGF$, $ABDF$ вписанные и PB касается ω, получаем:

$$\angle EGD = \angle EFD = 180^\circ - \angle DBA = \angle PBD = \angle BGD$$

Откуда следует, что B, E и G — лежат на одной прямой. Значит BE и CF пересекаются в точке G, лежащей на ω, что и требовалось.