VII Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 11–16 марта 2022 года

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Юниоры. Второй день

13 марта

5. Найдите количество решений (x, y, z) уравнения $x + y = 10z$, где x, y, z — шестизначные натуральные числа, запись которых состоит только из нечётных цифр.

6. 16 команд Национальной Хоккейной Лиги в первом раунде плей-офф разбиваются на 8 пар и играют друг с другом серии до четырёх побед (таким образом, счёт в серии может быть 4-0, 4-1, 4-2 или 4-3). После каждого раунда команды, победившие в своих парах, снова разбиваются на пары, а проигравшие команды больше не принимают участие в турнире. После четвёртого финального раунда оказалось, что ровно у k команд суммарное количество побед во все играх не меньше, чем количество поражений (например, под условие подходит команда, победившая в первом раунде со счётом 4-2 и проигравшая во втором со счётом 4-3: у неё 4+3 $=$ 7 побед и $2 + 4 = 6$ поражений). Найдите наименьшее возможное значение k.

7. На катете CB прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$) выбирается точка P. Прямая AP пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Пусть L середина PB. Докажите, что QL касается фиксированной окружности, не зависящей от выбора точки P.

8. Паша собирается написать многочлен $(x+1)^n$, раскрыть все скобки и привести подобные слагаемые, после чего заменить каждый коэффициент на обратный. Например, при $n = 3$ Паша получит сначала $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$, а затем, после замены, $x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+1$. Докажите, что Паша может выбрать такое n, что сумма всех коэффициентов итогового многочлена, включая старший и свободный, будет меньше 2,022.

VII Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 11–16 марта 2022 года

Сеньоры. Второй день

13 марта

5. 16 команд Национальной Хоккейной Лиги в первом раунде плей-офф разбиваются на 8 пар и играют друг с другом серии до четырёх побед (таким образом, счёт в серии может быть 4-0, 4-1, 4-2 или 4-3). После каждого раунда команды, победившие в своих парах, снова разбиваются на пары, а проигравшие команды больше не принимают участие в турнире. После четвёртого финального раунда оказалось, что ровно у k команд суммарное количество побед во все играх не меньше, чем количество поражений (например, под условие подходит команда, победившая в первом раунде со счётом 4-2 и проигравшая во втором со счётом 4-3: у неё $4{+}3 = 7$ побед и $2 + 4 = 6$ поражений). Найдите наименьшее возможное значение k.

6. Дан остроугольный треугольник ABC. Точка P выбрана на окружности (ABC), а точка Q — на отрезке AC так, что $AP \perp BC$ и $BQ \perp AC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника APQ. Найдите угол OBC.

7. Паша собирается написать многочлен $(x+1)^n$, раскрыть все скобки и привести подобные слагаемые, после чего заменить каждый коэффициент на обратный. Например, при $n = 3$ Паша получит сначала $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$, а затем, после замены, $x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+1$. Докажите, что Паша может выбрать такое n, что сумма всех коэффициентов итогового многочлена, включая старший и свободный, будет меньше 2,022.

8. В стране $n > 2022$ городов. Некоторые пары городов соединены прямыми двухсторонними авиалиниями. Назовём набор городов *неудачным*, если все авиалинии между ними нельзя раскрасить в два цвета так, чтобы не было одноцветных треугольников (то есть трёх городов, попарно соединённых авиалиниями одного цвета).

Оказалось, что набор из всех городов неудачный. Обязательно ли есть неудачный набор из 2022 городов?