VIII Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 9–14 марта 2023 года

Юниоры. Первый день

10 марта

1. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого верно следующее утверждение: произведение любых n подряд идущих нечетных натуральных чисел делится на 45.

2. В выпуклом шестиугольнике величина каждого угла равна 120°. Периметр шестиугольника равен 2. Докажите, что его можно накрыть треугольником, периметр которого не превосходит 3.

3. На доску выписаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2\underbrace{00\ldots0}_{100\text{ нулей}}2$. Можно ли покрасить половину этих чисел в красный цвет, а оставшиеся — в синий так, чтобы сумма красных чисел делилась на сумму синих?

4. Паша и Вова играют в игру, по очереди зачеркивая клетки доски 3×101. Исходно на доске зачеркнута только центральная клетка. За один ход игрок должен выбрать диагональ (в диагонали может быть 1, 2 или 3 клетки) и зачеркнуть в ней все еще не зачеркнутые клетки. Каждым ходом должна быть зачеркнута хотя бы одна новая клетка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Паша. Кто из игроков может выиграть вне зависимости от ходов противника?

VIII Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 9–14 марта 2023 года

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Сеньоры. Первый день

10 марта

1. Пусть n и m — натуральные числа, $n > m > 1$. Пусть при делении числа n на m с остатком получилось неполное частное q и остаток r (так что $n = qm + r$, где r принимает одно из значений $0, 1, \ldots, m-1$; например, для $n = 100$ и $m = 30$ имеем $q = 3$, $r = 10$; для $n = 100$ и $m = 25$ имеем $q = 4$, $r = 0$; и т. д.). Пусть также при делении числа $n-1$ на m с остатком получилось неполное частное q' и остаток r'.

а) Оказалось, что $q + q' = r + r' = 99$. Найдите все возможные значения n.

б) Докажите, что если $q + q' = r + r'$, то число $2n$ равно квадрату натурального числа.

2. Назар выбрал два вещественных числа a и b и написал два уравнения: $x^4 - 2b^3x + a^4 = 0$ и $x^4 - 2a^3x + b^4 = 0$. Докажите, что хотя бы одно из этих уравнений имеет вещественный корень.

3. а) Выясните, могут ли для некоторого выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ одновременно выполняться три неравенства:

$$\angle ABD + \angle AED > 180^\circ,$$
$$\angle BCE + \angle BFE > 180^\circ,$$
$$\angle CDF + \angle CAF > 180^\circ.$$

б) Тот же вопрос, если дополнительно известно, что в шестиугольнике диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

4. Даны натуральные числа n и k такие, что $n > k > 1$. Некоторые пары из n городов соединены авиалиниями. Известно, что для любых k городов среди этих k городов найдется город, который соединен авиалинией с каждым из остальных $k-1$ городов. При каком наименьшем количестве авиалиний это возможно?