VIII Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 1

Д. К. Мамий

П. А. Кожевников

Д. А. Белов

Е. В. Бакаев

Л. А. Емельянов

И. А. Кухарчук

К. А. Сухов

М. Сагафиян

9–14 марта 2023 г.

г. Майкоп

Республика Адыгея

1. Юниоры **10 марта**

1. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого верно следующее утверждение: произведение любых n подряд идущих нечетных натуральных чисел делится на 45.

Кожевников П.

Ответ. 6.

Решение. Приведем пример, показывающий, что для $n \leqslant 5$ данное утверждение неверно. Возьмем пять подряд идущих нечетных чисел: 11, 13, 15, 17, 19. Из них только 15 делится на 3, но оно не делится на 9. Значит, произведение этих чисел не делится на 9, следовательно не делится и на $45 = 9 \cdot 5$.

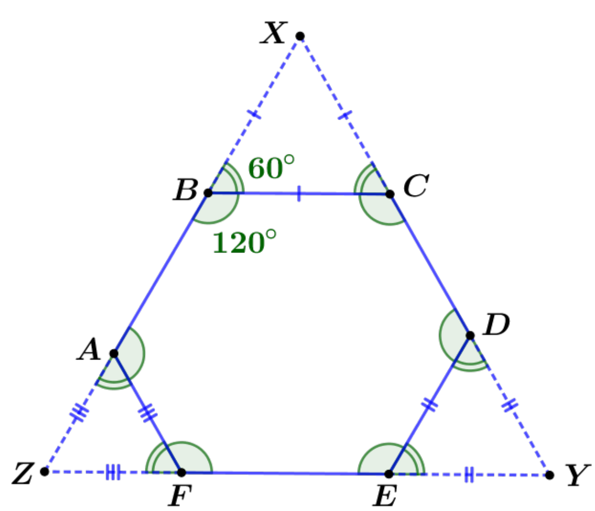
Докажем, что для $n = 6$ утверждение верно. Достаточно показать, что наше произведение делится на 5 и на 9.

Первые пять чисел n, $n+2$, $n+4$, $n+6$, $n+8$ дают различные остатки при делении на 5, в частности, одно из чисел делится на 5, а значит и произведение всех чисел делится на 5.

Данные 6 чисел разобьем на две тройки последовательных нечетных чисел так, что тройка имеет вид n, $n+2$, $n+4$. Числа в каждой такой тройке дают различные остатки при делении на 3, в частности, одно из этих чисел делится на 3. Тогда произведение чисел в каждой тройке делится на 3, и произведение всех 6 чисел делится на $3 \cdot 3 = 9$.

2. В выпуклом шестиугольнике величина каждого угла равна 120°. Периметр шестиугольника равен 2. Докажите, что его можно накрыть треугольником, периметр которого не превосходит 3.

Бакаев Е.



Решение. Назовем шестиугольник $ABCDEF$. Пусть, не умаляя общности,

$$BC + DE + AF \leqslant AB + CD + EF.$$

Так как периметр шестиугольника равен 2, $BC + DE + AF \leqslant 1$.

Продлим до пересечения пары сторон AB и DC, CD и FE, EF и BA. Пусть они пересекаются в точках X, Y и Z соответственно. Углы $\angle XBC$ и $\angle XCB$ треугольника XBC смежны с углами шестиугольника и равны по 60°, поэтому этот треугольник равносторонний. Тогда $XB = XC = BC$, и аналогичное верно для других треугольников: YDE и ZAF. Поэтому периметр треугольника XYZ равен

$$AB + CD + EF + 2BC + 2DE + 2AF = 2 + BC + DE + AF \leqslant 3,$$

и этот треугольник покрывает данный шестиугольник.

3. На доску выписаны числа 1, 2, 3, $\ldots$, $2\underbrace{00\ldots0}_{100\text{ нулей}}2$. Можно ли покрасить половину этих чисел в красный цвет, а оставшиеся — в синий так, чтобы сумма красных чисел делилась на сумму синих?

Белов Д.

Ответ. Нет, нельзя.

Решение. Обозначим самое большое выписанное число через $2n$. Минимальная сумма синих чисел равна

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Максимальная сумма красных чисел равна

$$(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+n) = n\cdot n+1+2+\ldots+n = \frac{2n^2 + n(n+1)}{2} = \frac{3n^2+n}{2}.$$

Так как $3n(n+1) > 3n^2 + n$, отношение суммы красных чисел к сумме синих меньше трех, значит, если все-таки сумма красных чисел делится на сумму синих, частное равно 1 или 2.

В первом случае мы получаем, что суммы красных чисел и синих чисел должны быть равны, поэтому сумма всех выписанных на доску чисел должна быть четна. При этом половина, а именно $1\underbrace{00\ldots0}_{100\text{ нулей}}1$, чисел нечетна. Поэтому сумма всех чисел на самом деле нечетна, и частное не может быть равно 1.

Во втором случае обозначим сумму синих чисел через S. Сумма красных чисел равна $2S$, а сумма всех выписанных чисел равна $3S$, то есть делится на 3. На самом же деле сумма выписанных чисел равна

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 2n = \frac{2n(2n+1)}{2}.$$

Признак делимости на 3 гласит: натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Сумма цифр числа $2n = 2\underbrace{00\ldots0}_{100\text{ нулей}}2$ равна 4, а сумма цифр числа $2n + 1$ равна 5. Поэтому оба этих числа не делятся на 3, тогда и сумма всех выписанных чисел на 3 не делится, и второй случай также невозможен.

4. Паша и Вова играют в игру, по очереди зачеркивая клетки доски 3×101. Исходно на доске зачеркнута только центральная клетка. За один ход игрок должен выбрать диагональ (в диагонали может быть 1, 2 или 3 клетки) и зачеркнуть в ней все еще не зачеркнутые клетки. Каждым ходом должна быть зачеркнута хотя бы одна новая клетка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Паша. Кто из игроков может выиграть вне зависимости от ходов противника?

Ефремов И.

Ответ. Вова.

Решение. Приведем одну из возможных стратегий за Вову. Покрасим клетки доски в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были черными. В нечетных столбцах крайние клетки будут черными, а в четных — белыми. Центральная клетка находится в 51-м столбце, поэтому она сама будет белой.

Каждая диагональ либо полностью черная, либо полностью белая. Обе стратегии будут симметричными, но разными для разных цветов. Для клеток белого цвета будем ходить симметрично относительно центрального столбца (осевая симметрия). Для черных клеток будем ходить симметрично относительно центральной клетки (центральная симметрия).

Докажем, что Вова всегда сможет сделать ход согласно стратегии. Для этого нужно убедиться, что своим ходом он будет зачеркивать хотя бы одну новую клетку. Для черных клеток две диагонали — выбранная Пашей и центрально-симметричная ей, выбранная Вовой — не имеют общих клеток. При этом Паша смог сделать ход, значит, на выбранной им диагонали была незачеркнутая клетка. Так как до хода Паши ситуация для черных клеток была центрально-симметричной, на Вовиной диагонали перед ходом Паши тоже была незачеркнутая клетка. Паша не мог ее зачеркнуть, значит, Вова своим ходом зачеркнет хотя бы одну новую клетку.

Для белых клеток ситуация несколько иная: две диагонали, проходящие через центральную клетку, симметричны относительно центрального столбца, но других симметричных белых диагоналей на доске нет. Опять же, перед ходом Паши ситуация на белых клетках осе-симметрична, то есть и на диагонали, выбираемой сейчас Пашей, и на диагонали, выбранной по стратегии Вовой, есть незачеркнутые клетки. Но единственная общая клетка, которую могут иметь осе-симметричные белые диагонали, зачеркнута с самого начала, поэтому Паша не может своим ходом зачеркнуть незачеркнутую клетку с Вовиной диагонали. Таким образом, Вова своим ходом зачеркнет хотя бы одну новую клетку.

Итак, мы доказали, что у Вовы всегда есть ход согласно стратегии. Так как ходов конечно (игра закончится не позже, чем через $3 \cdot 101 = 303$ хода, когда точно будут зачеркнуты все клетки), Вова победит.

2. Сеньоры **10 марта**

1. Пусть n и m — натуральные числа, $n > m > 1$. Пусть при делении числа n на m с остатком получилось неполное частное q и остаток r (так что $n = qm + r$, где r принимает одно из значений $0, 1, \ldots, m-1$; например, для $n = 100$ и $m = 30$ имеем $q = 3$, $r = 10$; для $n = 100$ и $m = 25$ имеем $q = 4$, $r = 0$; и т. д.). Пусть также при делении числа $n-1$ на m с остатком получилось неполное частное q' и остаток r'.

а) Оказалось, что $q + q' = r + r' = 99$. Найдите все возможные значения n.

б) Докажите, что если $q + q' = r + r'$, то число $2n$ равно квадрату натурального числа.

Агаханов Н.

Решение. Если $r' \neq m-1$, то при переходе от $n-1$ к n остаток увеличится на 1, а неполное частное не изменится, то есть $r = r' + 1$ и $q = q'$. В таком случае равенство $q + q' = r + r'$ принимает вид $2q = 2r' + 1$, что невозможно (четное число не равно нечетному).

Таким образом, единственная возможность: $r' = m - 1$, $r = 0$. При этом $q = q' + 1$. Тогда равенство $q + q' = r + r'$ принимает вид $2q - 1 = r'$, причем $r' = m - 1$.

а) Имеем $99 = 2q - 1 = m - 1$. Таким образом, $m = 100$, $q = 50$, тогда

$$n = qm + r = 50 \cdot 100 + 0 = 5000.$$

б) Имеем $2q - 1 = m - 1$. Значит $m = 2q$, и окончательно,

$$2n = 2qm = 4q^2 = (2q)^2.$$

2. Назар выбрал два вещественных числа a и b и написал два уравнения: $x^4 - 2b^3x + a^4 = 0$ и $x^4 - 2a^3x + b^4 = 0$. Докажите, что хотя бы одно из этих уравнений имеет вещественный корень.

Агаханов Н.

Решение. Функции $f(x) = x^4 - 2b^3x + a^4$, $g(x) = x^4 - 2a^3x + b^4$ — многочлены с положительным старшим коэффициентом, поэтому $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ при всех $x > c$ для некоторой константы c. Для доказательства наличия корня у многочлена $f(x)$ достаточно найти хотя бы одно значение x_0, для которого $f(x_0) \leqslant 0$ (существование корня следует из $f(x_0) \leqslant 0$ и $f(x_1) \geqslant 0$ по теореме о промежуточном значении для непрерывной функции $f(x)$). Аналогичное верно для многочлена $g(x)$. Далее можно рассуждать по-разному.

1 способ.

Заметим, что $f(b) = b^4 - 2b^4 + a^4 = a^4 - b^4$ и аналогично $g(a) = b^4 - a^4$. Видим, что хотя бы одно из чисел $f(b)$ и $g(a)$ неположительно.

2 способ.

Так как $f'(x) = 4x^3 - 2b^3$, видим, что $f(x)$ убывает на интервале $\left(-\infty; \frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]$ и возрастает на интервале $\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}; +\infty\right)$. Так что минимальное значение функции $f(x)$ равно $f\left(\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{-3b^4}{2\sqrt[3]{2}} + a^4$. Аналогично, минимальное значение функции $g(x)$ равно $\frac{-3a^4}{2\sqrt[3]{2}} + b^4$.

Сумма этих двух значений неположительна: она равна $k\left(a^4 + b^4\right)$, где $k = \frac{-3}{2\sqrt[3]{2}} + 1 < 0$. Поэтому одно из значений неположительно.

3. а) Выясните, могут ли для некоторого выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ одновременно выполняться три неравенства:

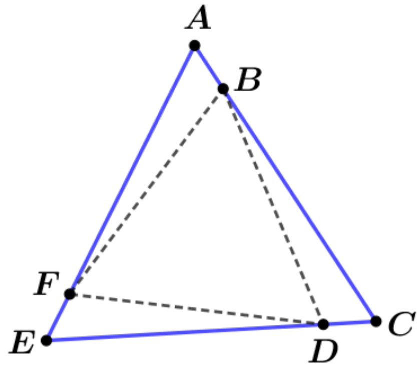
$$\angle ABD + \angle AED > 180^\circ,$$
$$\angle BCE + \angle BFE > 180^\circ,$$
$$\angle CDF + \angle CAF > 180^\circ.$$

б) Тот же вопрос, если дополнительно известно, что в шестиугольнике диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

Saghafian M., Кожевников П.

Ответ. а) да, могут; б) нет, не могут.

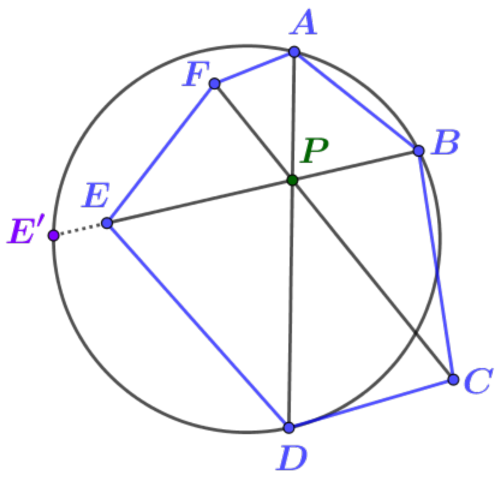
Решение. а) Опишем одну из возможных конструкций.



На сторонах AC, CE, EA правильного треугольника ACE отметим соответственно точки B, D, F «близко» к вершинам A, C, E. В таком положении сумма углов $\angle ABD + \angle AED$ близка к $180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$. То же верно для сумм углов $\angle BCE + \angle BFE$ и $\angle CDF + \angle CAF$.

Теперь можно чуть «выдвинуть» точки B, D, F вне треугольника ACE так, чтобы указанные суммы углов «мало» изменились, и образовался выпуклый шестиугольник $ABCDEF$.

б) Предположим противное, и требуемый шестиугольник $ABCDEF$ существует. Пусть P — точка пересечения AD, BE и CF.



Пусть луч PE пересекает окружность (ABD) в точке E'. Тогда

$$\angle AE'D = 180^\circ - \angle ABD,$$

но по условию

$$180^\circ - \angle ABD < \angle AED.$$

Из неравенства $\angle AE'D < \angle AED$ следует, что точка E' лежит на продолжении отрезка PE (иначе говоря, E лежит внутри окружности (ABD)), отсюда $PE < PE'$.

Далее, $PE \cdot PB < PE' \cdot PB = PD \cdot PA$. Итак, из первого неравенства из условия мы вывели, что $PE \cdot PB < PD \cdot PA$. Аналогично получим, что $PD \cdot PA < PF \cdot PC$ и $PF \cdot PC < PE \cdot PB$. Отсюда $PF \cdot PC < PF \cdot PC$ — противоречие.

4. Даны натуральные числа n и k такие, что $n > k > 1$. Некоторые пары из n городов соединены авиалиниями. Известно, что для любых k городов среди этих k городов найдется город, который соединен авиалинией с каждым из остальных $k-1$ городов. При каком наименьшем количестве авиалиний это возможно?

Дольников В.

Ответ. $\dfrac{n(n-1)}{2} - \dfrac{(k-1)(k-2)}{2}$, если k четно;

$\dfrac{n(n-1)}{2} - \max\left(\dfrac{(k-1)(k-2)}{2}; \left[\dfrac{n}{2}\right]\right)$, если k нечетно.

Решение. Перейдем к дополнительному графу. Нам известно, что среди любых k вершин найдется вершина, которая не соединена с остальными. При таком условии нам требуется найти наибольшее возможное количество ребер.

Пример. Полный граф на $k-1$ вершине, очевидно подходит. При нечетном k подходит любое паросочетание, в том числе, в котором $\left[\frac{n}{2}\right]$ ребер.

Оценка. Будем называть подграф *красивым,* если у каждой его вершины есть ребро в нем. Рассуждаем от противного: предполагаем, что ребер в нашем графе больше, чем в указанных примерах, и в таком случае находим *красивый* подграф.

Ниже будем использовать известный факт: из связного графа (в котором хотя бы 2 вершины) можно удалить вершину так, чтобы после удаления снова получился связный граф.

Оценка для четного $\boldsymbol{k}$. Пусть в графе больше ребер, чем в полном графе на $k-1$ вершине. Рассмотрим все компоненты связности нашего графа, в которых есть ребра. Объединим их в *красивый* подграф G, в котором находятся все ребра нашего исходного графа. Так как этих ребер больше, чем $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$, то вершин не меньше, чем k. Будем пытаться последовательно удалять вершины из нашего подграфа, пока не останется *красивый* подграф на k вершинах. Если в графе есть компонента связности, в которой более двух вершин, то удалим в ней вершину без потери связности. Если же в графе нет таких компонент, то все компоненты состоят из двух вершин, выберем $\frac{k}{2}$ из этих компонент.

Оценка для нечетного $\boldsymbol{k}$. Заметим, что найдется компонента K такая, что $|K| \geqslant 3$, иначе из каждой вершины выходит не более одного ребра и всего ребер не более $\left[\frac{n}{2}\right]$. Если $|K| \geqslant k$, то выкидывая из нее вершины по одной, сохраняя связность, мы придем к *красивому* подграфу на k вершинах.

Иначе, если $|K| < k$, будем проделывать процесс как в оценке для четного случая, не трогая K. Пусть процесс остановился на *красивом* подграфе Γ, в котором все еще больше k вершин. Тогда Γ состоит из K и нескольких компонент из двух вершин. В случае $|\Gamma| \geqslant k+2$, продолжим удалять компоненты из двух ребер. Если придем к ситуации $|\Gamma| = k+1$, то, удалив одну вершину из K, сохраняя связность, придем к *красивому* подграфу на k вершинах.