VIII Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 2

Д. К. Мамий
П. А. Кожевников
Д. А. Белов
Е. В. Бакаев
Л. А. Емельянов
И. А. Кухарчук
К. А. Сухов
М. Сагафиян

9–14 марта 2023 г.
г. Майкоп
Республика Адыгея

1. Юниоры **11 марта**

5. Егор заполнил таблицу $1 \times n$ целыми числами, среди которых нет равных. Могло ли так оказаться, что при любом $k = 1, 2, \ldots, n$ можно найти прямоугольник $1 \times k$, в котором сумма чисел равна 0 для

а) $n = 11$;

б) $n = 12$?

Бакаев Е., Кожевников П.

Ответ. Да, могло в обоих пунктах.

Решение. а) Для $n = 11$ Егор мог заполнить таблицу слева направо числами так: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5. Для нечетных k можно выбрать прямоугольник $1 \times k$, содержащий крайнюю левую клетку, а при четных k — крайнюю правую.

б) Для $n = 12$ Егор мог заполнить таблицу слева направо числами так: 0, 1, 2, -3, 4, -4, 5, -5, 6, -6, 7, -7. Для $k = 2$ можно выбрать прямоугольник $1 \times k$, содержащий крайнюю правую клетку, а для четных $k > 2$ можно выбрать прямоугольник $1 \times k$, содержащий крайнюю левую клетку. Для нечетных $k > 1$ можно выбрать прямоугольник, в котором самая левая клетка будет содержать число 1.

6. Натуральные числа a, b, c таковы, что

$$\text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = \text{НОД}(a, c) + \text{НОК}(a, c).$$

Верно ли, что тогда обязательно $b = c$?

Кожевников П.

Ответ. Да, верно.

Решение 1. Перепишем данное равенство в виде

$$\text{НОД}(a, b) - \text{НОД}(a, c) = \text{НОК}(a, c) - \text{НОК}(a, b).$$

В правой части оба числа делятся на a, значит, левая часть тоже делится на a. Так как $1 \leqslant \text{НОД}(a, b), \text{НОД}(a, c) \leqslant a$, из этого следует, что $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, c)$ и левая часть равна 0. Тогда и правая часть равна 0, то есть $\text{НОК}(a, c) = \text{НОК}(a, b)$.

Воспользуемся известным тождеством $\text{НОД}(x, y) \cdot \text{НОК}(x, y) = x \cdot y$ для пары чисел a, b и пары чисел a, c. Из этого тождества следует, что $ab = ac$, и, сокращая на a, имеем $b = c$.

Решение 2. Положим $d = \text{НОД}(a, b)$, $d' = \text{НОД}(a, c)$. Тогда $\text{НОК}(a, b) \vdots d$ и $\text{НОК}(a, c) \vdots a \vdots d$, поэтому $d' = d + \text{НОК}(a, b) - \text{НОК}(a, c)$ делится на d. Аналогично можно показать, что d делится на d'. Отсюда $d = d'$.

Далее, с учетом того, что $\text{НОК}(a, b) = \dfrac{ab}{d}$, $\text{НОК}(a, c) = \dfrac{ac}{d'} = \dfrac{ac}{d}$, имеем $d + \dfrac{ab}{d} = d + \dfrac{ac}{d}$, откуда $\dfrac{ab}{d} = \dfrac{ac}{d}$, значит $ab = ac$ и $b = c$.

Замечание. Приведем схему вариации решения с пошаговым «отщипыванием» простых делителей.

Пусть хотя бы один из НОДов d, d' больше 1, скажем, $d > 1$, то есть a и b делятся на некоторое простое p. Тогда $\text{НОК}(a, b) \vdots p$ и $\text{НОК}(a, c) \vdots a \vdots p$, значит и $d' = d + \text{НОК}(a, b) - \text{НОК}(a, c)$ делится на p, поэтому c тоже делится на p.

Положим $a = pa'$, $b = pb'$, $c = pc'$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{НОД}(a, b) &= p \cdot \text{НОД}(a', b'), \\ \text{НОК}(a, b) &= p \cdot \text{НОК}(a', b'), \\ \text{НОД}(a, c) &= p \cdot \text{НОД}(a', c'), \\ \text{НОК}(a, c) &= p \cdot \text{НОК}(a', c'). \end{aligned}$$

После сокращения на p из данного в условии равенства получается аналогичное равенство для чисел a', b' и c'.

В случае $\text{НОД}(a', b') > 1$ или $\text{НОД}(a', c') > 1$ продолжим процесс сокращения на простые множители. Через несколько таких ходов придем к ситуации $\text{НОД}(a'', b'') = \text{НОД}(a'', c'') = 1$, в которой

$$\text{НОК}(a'', b'') = a''b'', \quad \text{НОК}(a'', c'') = a''c''.$$

Получаем $1 + a''b'' = 1 + a''c''$, откуда $b'' = c''$. Но поскольку $b'' = c''$, равны и начальные числа b и c.

7. У Саши есть 10 карточек с числами $1, 2, 4, 8, \ldots, 512$. Он пишет на доске число 0 и предлагает Диме сыграть в игру. Дима своим ходом называет целое число $0 < p < 10$, это число может быть разным от раунда к раунду. Саша выбирает p карточек, перед которыми ставит знак «$+$», а перед остальными карточками ставит знак «$-$». Результат вычисляется и прибавляется к числу на доске. Какой наибольший по модулю результат через несколько раундов может получить Дима, как бы ни действовал Саша?

Белов Д., Хуснуллин А.

Ответ. 256.

Решение. Сначала докажем, что Саша может всегда получать результат из отрезка $[-256; 256]$. Будем считать, что текущее число на доске неположительно (в противном случае можно заменить все знаки в рассуждениях на противоположные). Разберем два случая для числа p, называемым Димой на очередном раунде.

Случай 1. Пусть $1 \leqslant p \leqslant 8$. Тогда поставим знаки так: $+512 - 256 - 128$, а остальные знаки расставим произвольным образом. Так как $512 > 1 + 2 + \ldots + 256 = 511$, результат будет положительным, и число на доске не станет меньше -256. С другой стороны, результат не превосходит $512 - 256 - 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 255$, значит, число на доске не станет больше 256.

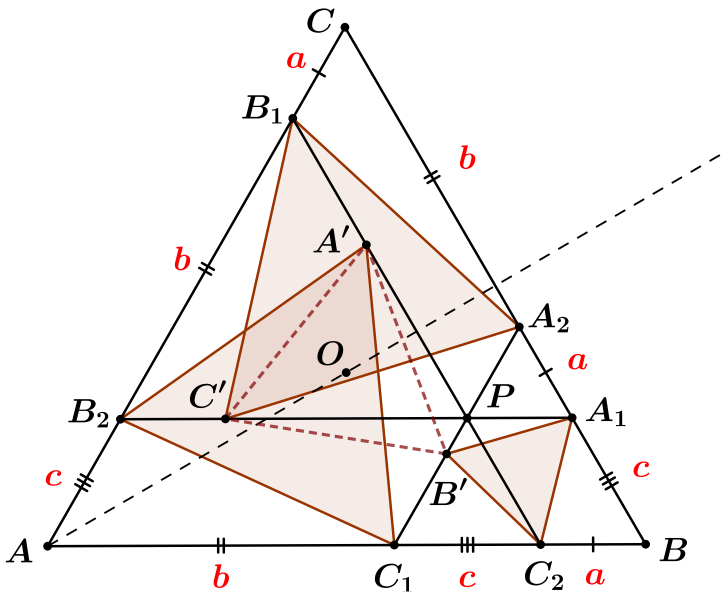
Случай 2. Пусть $p = 9$. Если текущее число на доске не равно -256, Саша может поставить знак минус перед числом 512 и плюсы перед остальными знаками. Результат после вычислений будет равен -1, поэтому число на доске останется на отрезке $[-256; 256]$. Если же текущее число на доске равно -256, Саша может поставить знак минус перед числом 256 и плюсы перед остальными знаками. Результат вычислений будет равен 511, поэтому следующее число на доске будет равно 255 — за пределы отрезка Саша не вышел.

Теперь докажем, что Дима может добиться результата 256. Будем называть всегда $p = 1$. Если Саша ставит плюс перед числом 512, результат вычислений будет равен $+1$, и число на доске увеличится. Чтобы не допустить появления числа, превосходящего 255, Саше нужно в какой-то момент поставить знак плюс перед другим числом. В такой ситуации результат вычисления отрицательный и по модулю не меньше $512 - 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 511$. Поэтому следующее число на доске не больше, чем $255 - 511 = -256$, и Дима добился желаемого результата.

8. Пусть ABC — равносторонний треугольник с длиной стороны $a + b + c$. На стороне AB треугольника ABC взяты точки C_1 и C_2, на стороне BC — точки A_1 и A_2, на стороне CA — точки B_1 и B_2 так, что $A_1A_2 = CB_1 = BC_2 = a$, $B_1B_2 = AC_1 = CA_2 = b$, $C_1C_2 = BA_1 = AB_2 = c$. Пусть точка A' такова, что треугольник $A'B_2C_1$ — равносторонний, а точки A и A' лежат по разные стороны от прямой B_2C_1. Аналогично строятся точки B' и C' (треугольник $B'C_2A_1$ — равносторонний, а точки B и B' лежат по разные стороны от прямой C_2A_1; треугольник $C'A_2B_1$ — равносторонний, а точки C и C' лежат по разные стороны от прямой A_2B_1). Докажите, что треугольник $A'B'C'$ — равносторонний.

Бакаев Е.

Решение. Так как $CB_1 = BC_2 = a$, то $B_1C_2 \parallel BC$ и треугольник AB_1C_2 — равносторонний треугольник, у которого длины сторон равны $b + c$. Аналогично $C_1A_2 \parallel CA$. Пусть C_1A_2 пересекает B_1C_2 в точке P. Тогда CB_1PA_2 — параллелограмм, значит, $B_1P = CA_2 = b$ и $C_2P = B_1C_2 - B_1P = c$. Так же доказывается, что $A_1B_2 \parallel AB$, при этом A_1B_2 пересекает B_1C_2 в той же точке P, для которой $B_1P = b$, $C_2P = c$.



Пусть ℓ_a — биссектриса угла BAC, тогда ℓ_a — ось симметрии треугольников ABC и AB_1C_2. Пусть точка A_3 симметрична точке P относительно ℓ_a, то есть A_3 — точка на отрезке B_1C_2 такая, что $A_3C_2 = PB_1 = b$, $A_3B_1 = PC_2 = c$.

Тогда треугольники AB_2C_1, $B_1A_3B_2$ и $C_2C_1A_3$ равны по двум сторонам и углу между ними, равному $60°$, иначе говоря, эти треугольники переходят друг в друга при повороте вокруг центра треугольника AB_1C_2 на угол $120°$. Значит, $C_1B_2 = B_2A_3 = A_3C_1$, то есть треугольник $C_1B_2A_3$ — равносторонний, поэтому точка A_3 совпадает с A'.

Аналогично рассуждая, понимаем, что B' симметрична точке P (пересечения отрезков B_1C_2, C_1A_2 и A_1B_2) относительно биссектрисы ℓ_b угла CBA, а C' симметрична точке P относительно биссектрисы ℓ_c угла ACB.

Итак, прямые ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c пересекаются в одной точке O, центре треугольника ABC, и составляют друг с другом равные углы в $60°$. Точка P при отражении относительно прямых ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c переходит соответственно в точки A', B', C'. Докажем, что в таком случае треугольник $A'B'C'$ — равносторонний, а O — его центр.

Действительно, из отражения $OA' = OP = OB'$, а угол $A'OB'$ равен удвоенному углу между прямыми ℓ_a и ℓ_b, то есть $\angle A'OB' = 120^\circ$. Аналогично $OA' = OB' = OC'$ и $\angle A'OB' = \angle B'OC' = \angle C'OA' = 120^\circ$. Это завершает решение.

2. Сеньоры **11 марта**

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что

$$\text{НОД}(a,b) + \text{НОК}(a,b) = \text{НОД}(a,c) + \text{НОК}(a,c).$$

Верно ли, что тогда обязательно $b = c$?

Кожевников П.

Ответ. Да, верно.

Решение 1. Перепишем данное равенство в виде

$$\text{НОД}(a,b) - \text{НОД}(a,c) = \text{НОК}(a,c) - \text{НОК}(a,b).$$

В правой части оба числа делятся на a, значит, левая часть тоже делится на a. Так как $1 \leqslant \text{НОД}(a,b)$, $\text{НОД}(a,c) \leqslant a$, из этого следует, что $\text{НОД}(a,b) = \text{НОД}(a,c)$ и левая часть равна 0. Тогда и правая часть равна 0, то есть $\text{НОК}(a,c) = \text{НОК}(a,b)$.

Воспользуемся известным тождеством $\text{НОД}(x,y) \cdot \text{НОК}(x,y) = x \cdot y$ для пары чисел a, b и пары чисел a, c. Из этого тождества следует, что $ab = ac$, и, сокращая на a, имеем $b = c$.

Решение 2. Положим $d = \text{НОД}(a,b)$, $d' = \text{НОД}(a,c)$. Тогда $\text{НОК}(a,b) \,\vdots\, d$ и $\text{НОК}(a,c) \,\vdots\, a \,\vdots\, d$, поэтому $d' = d + \text{НОК}(a,b) - \text{НОК}(a,c)$ делится на d. Аналогично можно показать, что d делится на d'. Отсюда $d = d'$.

Далее, с учетом того, что $\text{НОК}(a,b) = \dfrac{ab}{d}$, $\text{НОК}(a,c) = \dfrac{ac}{d'} = \dfrac{ac}{d}$, имеем $d + \dfrac{ab}{d} = d + \dfrac{ac}{d}$, откуда $\dfrac{ab}{d} = \dfrac{ac}{d}$, значит $ab = ac$ и $b = c$.

Замечание. Приведем схему вариации решения с пошаговым «отщипыванием» простых делителей.

Пусть хотя бы один из НОДов d, d' больше 1, скажем, $d > 1$, то есть a и b делятся на некоторое простое p. Тогда $\text{НОК}(a,b) \,\vdots\, p$ и $\text{НОК}(a,c) \,\vdots\, a \,\vdots\, p$, значит и $d' = d + \text{НОК}(a,b) - \text{НОК}(a,c)$ делится на p, поэтому c тоже делится на p.

Положим $a = pa'$, $b = pb'$, $c = pc'$. Тогда

$$\begin{aligned}
\text{НОД}(a, b) &= p \cdot \text{НОД}(a', b'),\\
\text{НОК}(a, b) &= p \cdot \text{НОК}(a', b'),\\
\text{НОД}(a, c) &= p \cdot \text{НОД}(a', c'),\\
\text{НОК}(a, c) &= p \cdot \text{НОК}(a', c').
\end{aligned}$$

После сокращения на p из данного в условии равенства получается аналогичное равенство для чисел a', b' и c'.

В случае $\text{НОД}(a', b') > 1$ или $\text{НОД}(a', c') > 1$ продолжим процесс сокращения на простые множители. Через несколько таких ходов придем к ситуации $\text{НОД}(a'', b'') = \text{НОД}(a'', c'') = 1$, в которой

$$\text{НОК}(a'', b'') = a''b'', \quad \text{НОК}(a'', c'') = a''c''.$$

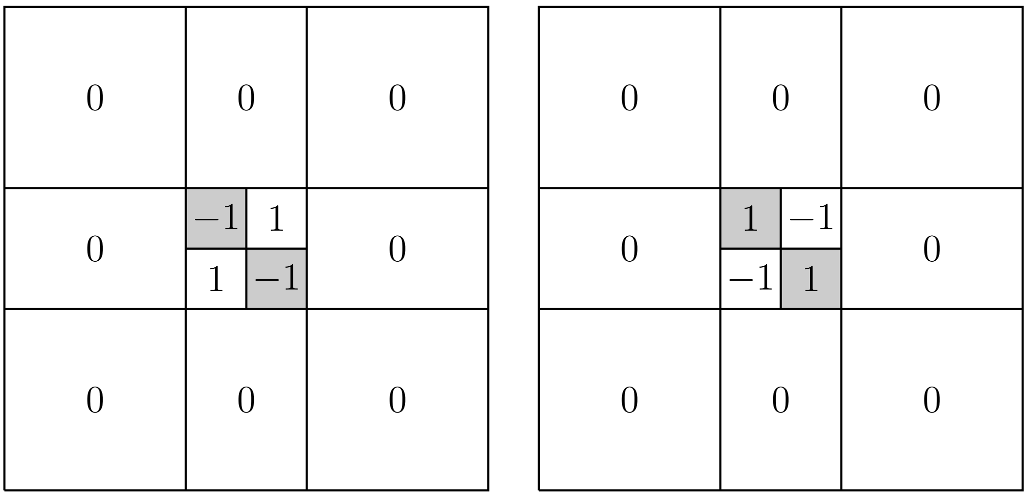
Получаем $1 + a''b'' = 1 + a''c''$, откуда $b'' = c''$. Но поскольку $b'' = c''$, равны и начальные числа b и c.

6. Дано натуральное $n \leqslant 100$. Заяц записал в клетки таблицы 100×100 вещественные числа. За один вопрос Волк может узнать сумму чисел в любом клетчатом квадрате $n \times n$ или в любом клетчатом прямоугольнике $1 \times (n-1)$ (или $(n-1) \times 1$). При каком наибольшем n Волк за несколько вопросов может гарантированно узнать значения чисел во всех клетках?

Шубин Я.

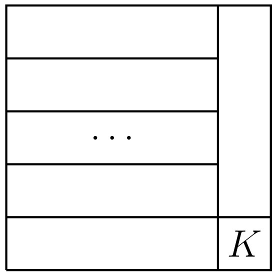
Ответ. 51

Решение. Пусть $n \geqslant 52$. Тогда рассмотрим такие два варианта расстановки чисел для Зайца. В обоих вариантах во всех клетках, кроме клеток центрального квадрата 2×2, поставим нули. Пусть в одном примере в этом квадрате на черных клетках стоят «1», а на белых — «-1», в другом примере — наоборот, на белых клетках стоят «1», а на черных — «-1».



Каждый квадрат $n \times n$ и прямоугольник $1 \times (n-1)$ покрывает в центральном квадрате 2×2 одинаковое количество черных и белых клеток. Поэтому и в первом, и во втором варианте ответом на любой вопрос Волка будет «0».

Теперь докажем, что при $n = 51$ Волк сможет узнать любое число. Рассмотрим любую клетку K. Найдется квадрат 51×51, где K будет угловой клеткой. Разобьем все клетки этого квадрата 51×51, кроме нашей угловой клетки K, на прямоугольники 1×50.



Таким образом, Волк сможет узнать значение в данной клетке, если из суммы чисел в квадрате вычтет все суммы в этих прямоугольниках 1×50.

7. Числа 1, 2, $\ldots$, n написаны на доске. За один ход можно стереть два числа a и b и вместо них записать число $a^2 - b$. Найдите все n, для которых после $n-1$ хода можно получить число 0.

Saghafian M., Tkadlec J.

Ответ. n вида $4k$ и $4k+3$, где k — целое.

Решение. Заметим, что четность числа $a^2 - b$ такая же, как у числа $a+b$, поэтому наша операция не изменяет четности суммы всех выписанных чисел. При $n = 4k+1$ и $n = 4k+2$ начальная сумма $1+2+\ldots+n$ нечетна (в ней $2k+1$ нечетных слагаемых), значит при таких n ответ в задаче отрицательный.

Далее, докажем такое *утверждение*: из данных чисел a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{2k} можно получить любое число вида $a_0 \pm a_1^2 \pm a_2^2 \pm \ldots \pm a_{2k}^2$, в котором ровно k знаков «$+$» и k знаков «$-$».

Действительно, последовательно выполняя операции, выписываем числа $a_i^2 - a_0$, $a_j^2 - \left(a_i^2 - a_0\right) = a_j^2 - a_i^2 + a_0$, $a_t^2 - \left(a_j^2 - a_i^2 + a_0\right) = a_t^2 - a_j^2 + a_i^2 - a_0$, $a_s^2 - \left(a_t^2 - a_j^2 + a_i^2 - a_0\right) = a_s^2 - a_t^2 + a_j^2 - a_i^2 + a_0$, и так далее (при этом индексы i, j, t, s, $\ldots$ выбираются произвольно, то есть образуют любую перестановку индексов 1, 2, $\ldots$, $2k$.

Докажем, что ответ для некоторого $n > 8$ будет положительным, если известно, что для $n-8$ ответ положительный. Действительно, для данных чисел 1, 2, $\ldots$, $n-8$, $n-7$, $n-6$, $n-5$, $n-4$, $n-3$, $n-2$, $n-1$, n вначале проделаем $n-9$ операций, после которых из первых $n-8$ чисел получается

0. Далее, согласно *утверждению,* из чисел 0, $n-7$, $n-6$, $n-5$, $n-4$, $n-3$, $n-2$, $n-1$, n получим число

$$0+(n-7)^2-(n-6)^2-(n-5)^2+(n-4)^2-(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2-n^2.$$

Это число равно 0 для любого n (в этом можно убедиться непосредственной проверкой). Итак, мы научились делать «шаг» $n-8\to n$. Для решения остается убедиться, что ответ положительный для $n=3,4,7,8$.

Для $n=3$:

$$(1,2,3)\to(1,2^2-3)=(1,1)\to 0.$$

Для $n=4$:

$$(1,2,3,4)\to(1,2,3^2-4)=(1,2,5)\to(1,2^2-5)=(1,-1)\to(-1)^2-1=0.$$

Для $n=7$, согласно *утверждению,* $(1,2,3,4,5,6,7)$ можно привести к

$$1+2^2-3^2+4^2-5^2-6^2+7^2=0.$$

Для $n=8$:

$$(1,2,3,4,5,6,7,8)\to(1,1,4,5,6,7,8)\to(0,4,5,6,7,8)\to(-4,5,6,7,8),$$

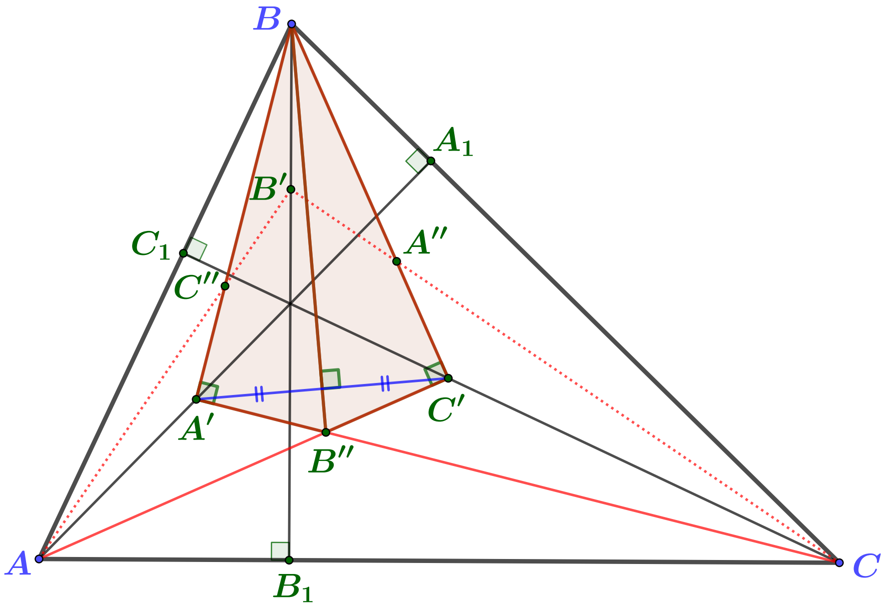
что далее, согласно *утверждению,* можно привести к

$$-4+5^2-6^2-7^2+8^2=0.$$

8. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1, CC_1. На отрезках AA_1, BB_1, CC_1 отметили соответственно точки A', B', C' так, что $\angle BA'C=\angle AC'B=\angle CB'A=90^\circ$. Отрезки AC' и CA' пересекаются в точке B'', отрезки CB' и BC' — в точке A'', отрезки BA' и AB' — в точке C''. Докажите, что в шестиугольник $A'B''C'A''B'C''$ можно вписать окружность.

Емельянов Л.

Решение. Из прямоугольного треугольника $AC'B$ имеем $BC'^2=BC_1\cdot BA$. Аналогично $BA'^2=BA_1\cdot BC$. Но четырехугольник AC_1A_1C вписанный (в окружность, построенную на AC как на диаметре), поэтому $BC_1\cdot BA=BA_1\cdot BC$. Таким образом, $BA'=BC'$.



Далее, серединный перпендикуляр m к отрезку $A'C'$ является осью симметрии треугольника $BA'C'$. Поскольку $\angle BA'B'' = \angle BC'B'' = 90°$, прямые $B''A'$ и $B''C'$ также симметричны относительно m. Получается, что $BA'B''C'$ — дельтоид, и m — его ось симметрии. Пусть O' — центр описанной окружности треугольника $A'B'C'$. Тогда O' лежит на m, и из предыдущего рассуждения вытекает, что

$$\rho\,(O', A'C'') = \rho\,(O', C'A'') \quad \text{и} \quad \rho\,(O', A'B'') = \rho\,(O', C'B'')\,,$$

где $\rho(X, y)$ означает расстояние от точки X до прямой y.

Аналогично рассуждая, получаем, что

$$\rho\,(O', B'A'') = \rho\,(O', A'B'') \quad \text{и} \quad \rho\,(O', B'C'') = \rho\,(O', A'C'')\,;$$
$$\rho\,(O', C'B'') = \rho\,(O', B'C'') \quad \text{и} \quad \rho\,(O', C'A'') = \rho\,(O', B'A'')$$

Видим, что все шесть расстояний от O' до прямых, содержащих стороны шестиугольника $A'B''C'A''B'C''$ равны. При этом, очевидно, O' лежит внутри каждого из треугольников $BA'C$, $CB'A$, $AC'B$, и, значит, внутри шестиугольника $A'B''C'A''B'C''$ (являющегося пересечением этих треугольников). Тем самым, в $A'B''C'A''B'C''$ можно вписать окружность с центром O'.