IX Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 1

Д. К. Мамий
П. А. Кожевников
Д. А. Белов
Е. В. Бакаев
Л. А. Емельянов
М. Сагафиян
К. А. Сухов

11–16 марта 2024 г.
г. Майкоп
Республика Адыгея

1. Юниоры 12 марта

1. В двух коробках лежат шарики: красные, синие и белые. Если вытащить 3 шарика из первой коробки, то среди них обязательно найдётся синий. Если вытащить 4 шарика из второй коробки, среди них обязательно будет красный. Если взять любые 5 шариков (только из 1-ой, только из 2-ой или из двух коробок одновременно), то среди них обязательно найдется белый шарик. Какое наибольшее количество шариков может быть в двух коробках вместе?

Дмитрий Белов

Ответ. 9.

Решение. *Оценка.* Рассмотрим условие на первую коробку. Из него следует, что в первой коробке не синих шариков не больше двух: иначе мы могли бы набрать 3 шарика, среди которых нет синих.

Рассмотрим условие на вторую коробку. Из него аналогично следует, что во второй коробке не красных шариков не больше трёх.

Таким образом, всего шариков не более $2+3=5$, если не учитывать синие шарики из первой коробки и красные шарики из второй.

Наконец, из условия на две коробки сразу следует, что всего не белых шариков не более четырёх. В частности, синих шариков из первой коробки и красных шариков из второй в сумме не больше четырёх. Поэтому общее число шариков не превосходит $5+4=9$.

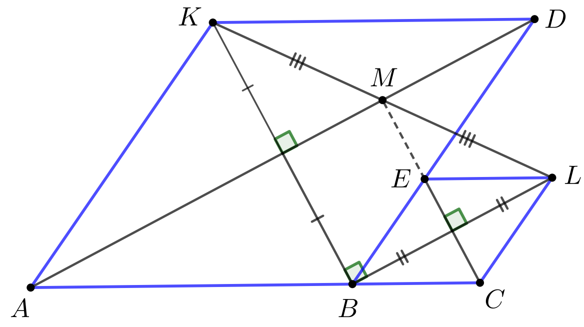
Пример. Положим в первую коробку 2 белых шарика и 2 синих, а во вторую — 2 красных шарика и 3 белых. Нетрудно убедиться, что все условия выполняются.

2. Ромбы $ABDK$ и $CBEL$ расположены так, что B лежит на отрезке AC, а E лежит на отрезке BD. Точка M — середина KL. Докажите, что $\angle DME = 90°$.

Егор Бакаев

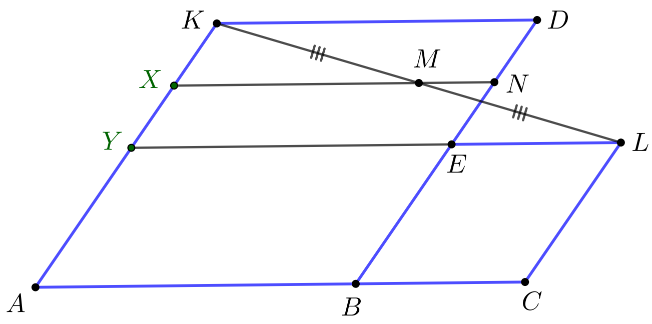
Решение 1.

Заметим, что $BK \perp BL$ как биссектрисы смежных углов. Поскольку $CE \perp BL$ (диагонали ромба), имеем $CE \parallel BK$. Кроме того, CE делит отрезок BL пополам, поэтому CE — средняя линия треугольника BKL, и она содержит середину M отрезка KL.



Аналогично понимаем, что AD — это другая средняя линия треугольника BKL, параллельная BL. Также AD проходит через M. После того, как мы показали, что M лежит на прямых CE и AD, для завершения решения достаточно вспомнить, что $AD \perp CE$.

Решение 2.



Пусть a и b — длины сторон ромбов $ABDK$ и $CBEL$ соответственно. Проведем через M прямую, параллельную KD (или AC); пусть она пересекла ED в точке N. Так как M — середина KL, прямая MN делит пополам любой отрезок с концами на (параллельных) прямых KD и LE, в частности, N — середина DE. Тогда

$$DN = EN = \frac{BD - BE}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

Для завершения решения достаточно показать, что MN также равен $\frac{a-b}{2}$. Пусть MN и EL пересекают AK в точках X и Y соответственно. Тогда MX — средняя линия в треугольнике YKL, а $YKDE$ и $XKDN$ — параллелограммы. Тогда

$$MN = XN - XM = YE - \frac{YE + EL}{2} = \frac{YE - EL}{2} = \frac{KD - EL}{2} = \frac{a-b}{2},$$

что и требовалось.

3. Даны 10 натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_{10}. Известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 1000$. Оказалось, что произведение их факториалов

$$a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_{10}!$$

является 10-й степенью натурального числа. Докажите, что все данные числа равны.

Егор Бакаев

Решение. Пусть не все данные числа равны, тогда хотя бы одно число не меньше 101. Число 101 — простое, поэтому произведение факториалов должно делиться хотя бы на 101^{10}.

Оценим степень вхождения числа 101 в произведение факториалов (то есть наибольшую степень числа 101, на которую это произведение делится). Количество чисел, не превосходящих a_i и делящихся на 101, не превосходит

$a_i/101$ (обратите внимание, что здесь мы пользуемся тем, что $101^2 > 1000 > a_i$, то есть что никакое число, не превосходящее a_i, не делится на 101^2). Таким образом, степень вхождения числа 101 в произведение факториалов не больше

$$\frac{a_1}{101} + \frac{a_2}{101} + \ldots + \frac{a_{10}}{101} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}}{101} = \frac{1000}{101},$$

что меньше 10. Поэтому произведение факториалов не делится на 101^{10}, противоречие.

4. Дано множество P из $n > 100$ точек на плоскости. Никакие три точки не лежат на одной прямой. Между точками проведены $20n$ различных отрезков (концами отрезков являются данные n точек). Докажите, что существует прямая, не проходящая ни через одну из точек множества P, пересекающая хотя бы 200 проведённых отрезков.

Павел Кожевников

Решение. Возьмем прямую ℓ (условно — горизонтальную), не перпендикулярную никакой прямой, соединяющей пары точек. Тогда проекции данных n точек на ℓ будут различные точки; обозначим их слева направо $A_1, \ldots, A_n$. Спроектируем на ℓ данные в условии $20n$ отрезков, каждая из проекций будет отрезком вида A_iA_j. Достаточно показать, что какой-то из $n-1$ отрезков A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$ будет покрыт проекциями данных в условии отрезков не менее чем в 200 слоев; действительно, если отрезок A_iA_{i+1} покрыт хотя бы 200 проекциями, то серединный перпедикуляр к нему пересекает не менее 200 из данных отрезков.

Каждой проекции A_iA_j припишем *ранг* $r = |i-j|$ — это количество отрезков среди A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, которые A_iA_j покрывает. Упорядочим проекции в неубывающем порядке рангов:

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant \ldots \leqslant r_{20n}.$$

Заметим, что у нас может быть не более n отрезков ранга 1 (и даже не более $n-1$ — это сами отрезки A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$), не более n отрезков ранга 2 (и даже не более $n-2$ — это отрезки A_1A_3, A_2A_4, $\ldots$, $A_{n-2}A_n$), и т.д., не более n отрезков ранга 19. Поэтому

$$r_{n+1} \geqslant 2,\ r_{2n+1} \geqslant 3,\ \ldots,\ r_{19n+1} \geqslant 20.$$

Тогда оценим суммарный ранг всех $20n$ проекций:

$$R = r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_{20n} = (r_1 + \ldots + r_n) + \\ + (r_{n+1} + \ldots + r_{2n}) + (r_{2n+1} + \ldots + r_{3n}) + \ldots + (r_{19n+1} + \ldots + r_{20n}) \geqslant \\ \geqslant n \cdot 1 + n \cdot 2 + n \cdot 3 + \ldots + n \cdot 20 = 210n.$$

Видим, что $R > 210(n-1)$, значит, в самом деле какой-то из $n-1$ отрезков A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$ покрыт даже не менее чем в 210 слоев.

2. Сеньоры **12 марта**

1. Даны положительные числа a, b, c, d. Известно, что выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$ab > \min\left\{\frac{c}{d}, \frac{d}{c}\right\}, \quad cd > \min\left\{\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right\}.$$

Докажите, что тогда выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$ac > \min\left\{\frac{b}{d}, \frac{d}{b}\right\}, \quad bd > \min\left\{\frac{a}{c}, \frac{c}{a}\right\}.$$

Александр Антропов

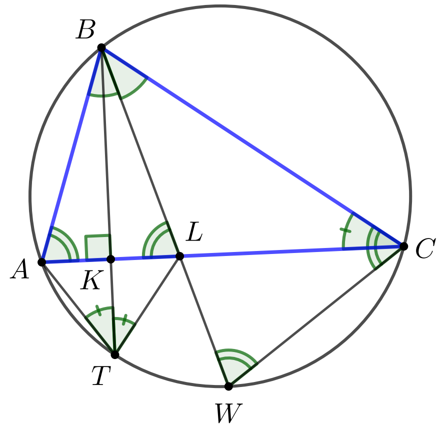
Решение. Условие $ab > \min\{\frac{c}{d}, \frac{d}{c}\}$ означает, что выполнено хотя бы одно из неравенств $ab > \frac{c}{d}$, $ab > \frac{d}{c}$ или, эквивалентно, хотя бы одно из неравенств $abd > c$, $abc > d$. Аналогично, условие $cd > \min\{\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\}$ означает, что выполнено хотя бы одно из неравенств $bcd > a$, $acd > b$. Таким образом, в задаче дано, что выполнено хотя бы одно из четырех неравенств $abd > c$, $abc > d$, $bcd > a$, $acd > b$.

Предположим противное тому, что надо доказать, тогда верно $ac \leqslant \min\{\frac{b}{d}, \frac{d}{b}\}$; $bd \leqslant \min\{\frac{a}{c}, \frac{c}{a}\}$, Отсюда $ac \leqslant \frac{b}{d}$, $ac \leqslant \frac{d}{b}$; $bd \leqslant \frac{a}{c}$, $bd \leqslant \frac{c}{a}$. Домножая эти неравенства соответственно на d, b, c, a, получаем: $acd \leqslant b$, $abc \leqslant d$, $bcd \leqslant a$. $abd \leqslant c$, таким образом, ни одно из неравенств $abd > c$, $abc > d$, $bcd > a$, $acd > b$ не выполнено. Противоречие.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса BL и высота BK. Прямые BL и BK пересекают вторично описанную окружность треугольника ABC в точках W и T соответственно. Оказалось, что $BC = BW$. Докажите, что $TL \perp BC$.

Всеволод Шурыгин

Решение.



Из вписанности $\angle BAL = \angle BAC = \angle BWC$. Получается, что в треугольниках BAL и BWC равны две пары соответствующих углов, значит равные углы и в третьей паре: $\angle BLA = \angle BCW$. Но из условия следует $\angle BWC = \angle BCW$, отсюда $\angle BAL = \angle BLA$.

Получается, что треугольник BAL равнобедренный ($BA = BL$), тогда BT — его ось симметрии, значит $\angle BTL = \angle BTA$. Но $\angle BTA = \angle BCA = 90^\circ - \angle CBK$. Видим, что $\angle BTL = 90^\circ - \angle CBT$, откуда $TL \perp BC$, что и требовалось.

Замечание. После установления симметрии треугольника BAL относительно BT, можно завершить решение разными способами.

Например, заметив, что

$$\angle TCW + \angle CWB = \angle TBW + \angle CAB = \angle TBA + \angle CAB = 90^\circ.$$

Тогда $CT \perp BW$, и в силу $CK \perp BT$, получаем, что L — точка пересечения двух высот в треугольнике BCT. Значит, TL — третья высота, то есть $TL \perp BC$, что и требовалось.

3. Пусть n — некоторое d-значное (то есть имеющее d цифр в десятичной записи) натуральное число, не делящееся на 10. Выписав цифры числа n в обратном порядке, получили число n'. Может ли десятичная запись произведения nn' состоять только из цифр «8», если **(a)** $d = 9998$; **(b)** $d = 9999$?

Олег Клименко

Ответ. (a) не может; (b)) не может.

Решение.

Предположим, что $P = nn' = \underbrace{888\ldots8}_{m}$. Так как $10^{d-1} < n < 10^d$ и $10^{d-1} < n' < 10^d$, то $10^{2d-2} < nn' < 10^{2d}$. Значит, в произведении $P = nn'$ количество знаков m равно либо $2d$, либо $2d-1$. Рассмотрим эти два случая.

Пусть $m = 2d-1$, где $d = 9998$. Так как $m \,\vdots\, 3$, то $s(P) \,\vdots\, 3$, где $s(P)$ — сумма цифр числа P. Тогда $P \,\vdots\, 3$, поэтому хотя бы одно из чисел n, n' делится на 3. Но так как $s(n) = s(n')$, эти два числа делятся на 3 одновременно, то есть оба должны делиться на 3. Но тогда $P = nn'$ делится на 9, значит, $s(P) = 8m$ должно делиться на 9, что неверно.

Пусть $m = 2d - 1$, где $d = 9999$. Тогда $P \equiv 8 \pmod{11}$. С другой стороны, согласно признаку, $n \equiv (s_1(n) - s_0(n)) \pmod{11}$, где $s_1(n)$ и $s_0(n)$ — соответственно суммы цифр на нечетных и четных позициях в числе n. Но тогда, поскольку d нечетно, в числах n и n' будут одинаковые наборы цифр на четных и нечетных позициях. Тогда

$$n' \equiv (s_1(n') - s_0(n')) \equiv (s_1(n) - s_0(n)) \equiv n \pmod{11}.$$

Значит, $P \equiv n^2 \pmod{11}$. Но точные квадраты могут давать только остатки 0, 1, 4, 9, 5, 3 по модулю 11. Противоречие.

Пусть $m = 2d$. Пусть a и b — первые цифры чисел n и n'. Тогда

$$n < (a+1) \cdot 10^{d-1}, \quad n' < (b+1) \cdot 10^{d-1},$$

отсюда

$$88 \cdot 10^{2d-2} < P = nn' < (a+1)(b+1) \cdot 10^{2d-2},$$

откуда

$$(a+1)(b+1) > 88.$$

Если обе цифры a, b не превосходят 8, то $(a+1)(b+1) < 81$. Если же одна из них равна 9, скажем, $a = 9$, то при $b \leqslant 7$ имеем $(a+1)(b+1) \leqslant 80$. Значит, $b = 8$ или $b = 9$. В этих случаях ab оканчивается на 2 или 1, а должно оканчиваться на 8, поскольку a и b должны являться также последними цифрами чисел n' и n.

Замечание 1. В случае $m = 2d$, где $d = 9998$ противоречие можно получить также с использованием следующих соображений.

(1) По модулю 9: $P \equiv 2 \pmod 9$, с другой стороны, $P \equiv nn' \equiv n^2 \pmod 9$.

(2) Делимость на 11: P делится на 11, но не на 121, а с другой стороны n и n' делятся или не делятся на 11 одновременно.

Однако эти соображения не сработают в случае $m = 2d$, где $d = 9999$.

Замечание 2. Можно доказать следующий общий факт: nn' является палиндромом, состоящим из нечётного количества цифр, тогда и только тогда, когда при умножении n на n' «столбиком» не происходит переносов через разряд.

4. Яша записывает в клетки таблицы 99×99 все натуральные числа от 1 до 99^2 (каждое число по разу). Гриша смотрит на таблицу, выбирает несколько клеток, среди которых нет двух клеток, имеющих общую сторону, а затем считает сумму чисел во всех выбранных клетках. Какую наибольшую сумму гарантированно может обеспечить Гриша?

Яков Шубин

Ответ. 24017351, иначе говоря, $(1+S)/2$, где $S = 1+2+\ldots+99^2$.

Решение. Для решения достаточно показать, что (I) Гриша всегда сможет набрать сумму больше $S/2$; и (II) Яша может расставить числа так, чтобы Гриша не смог набрать сумму больше $(1+S)/2$.

I. Раскрасим клетки в черный и белый цвет в шахматном порядке. Сумма S всех чисел нечетна, поэтому сумма чисел в клетках какого-то цвета будет больше $S/2$ — тогда Грише достаточно выбрать все клетки этого цвета.

II. Разобьем доску на квадрат 98×98 и каёмку толщиной в 1 клетку. Далее разобьем квадрат 98×98 на квадраты 2×2, а каёмку — на прямоугольники 1×4, один прямоугольник 1×3 и один прямоугольник 1×2. Разобьем множество $\{1, 2, 3, \ldots, 99^2\}$ на подмножества: $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5\}$ и четверки $\{6, 7, 8, 9\}$, $\{10, 11, 12, 13\}$, и т. д.,

В каждый квадрат 2×2 мы поставим четверку чисел $\{x, x+1, x+2, x+3\}$, чтобы x и $x+3$ стояли на одной диагонали, а $x+1$ и $x+2$ — на другой; тогда в любом случае Гриша из клеток этого квадрата наберет не более полусуммы чисел в этом квадрате.

В каждый прямоугольник 1×4 мы поставим четверку чисел $\{x, x+1, x+2, x+3\}$ в порядке x, $x+2$, $x+3$, $x+1$ (в средние клетки — $x+2$, $x+3$); тогда Гриша из клеток этого прямоугольника наберет не более $2x+3$, то есть не более полусуммы чисел в этом прямоугольнике.

В прямоугольник 1×3 поставим тройку $\{1, 3, 2\}$ (3 — в середине); тогда Гриша из клеток этого прямоугольника наберет не более 3, то есть не более полусуммы чисел в этом прямоугольнике.

Наконец, в прямоугольник 1×2 поставим числа 4 и 5.

Суммируя по всем прямоугольникам разбиения, видим, что общая сумма Гриши не првысит $(S-4-5)/2+5 = (S+1)/2$.

Замечание 1. Для решения можно использовать другие разбиения, кроме перечисленных в решении фигур 2×2, 1×4, 1×3, в них могут участвовать уголки из трех клеток. Соответственно, множество всех чисел может быть разбито на четверки вида $\{a, b, s-a, s-b\}$ и тройки вида $\{a, b, a+b\}$.

Замечание 2. В аналогичной задаче для любых достаточно больших размеров таблицы $m \times n$ ответом будет $S/2$, округленное вверх.