IX Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 11–16 марта 2024 года

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Юниоры. Первый день

12 марта

1. В двух коробках лежат шарики: красные, синие и белые. Если вытащить 3 шарика из первой коробки, то среди них обязательно найдётся синий. Если вытащить 4 шарика из второй коробки, среди них обязательно будет красный. Если взять любые 5 шариков (только из 1-ой, только из 2-ой или из двух коробок одновременно), то среди них обязательно найдется белый шарик. Какое наибольшее количество шариков может быть в двух коробках вместе?

2. Ромбы $ABDK$ и $CBEL$ расположены так, что B лежит на отрезке AC, а E лежит на отрезке BD. Точка M — середина KL. Докажите, что $\angle DME = 90°$.

3. Даны 10 натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_{10}. Известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 1000$. Оказалось, что произведение их факториалов

$$a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_{10}!$$

является 10-й степенью натурального числа. Докажите, что все данные числа равны.

4. Дано множество P из $n > 100$ точек на плоскости. Никакие три точки не лежат на одной прямой. Между точками проведены $20n$ различных отрезков (концами отрезков являются данные n точек). Докажите, что существует прямая, не проходящая ни через одну из точек множества P, пересекающая хотя бы 200 проведённых отрезков.

IX Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 11–16 марта 2024 года

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Сеньоры. Первый день

12 марта

1. Даны положительные числа a, b, c, d. Известно, что выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$ab > \min\left\{\frac{c}{d}, \frac{d}{c}\right\}, \quad cd > \min\left\{\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right\}.$$

Докажите, что тогда выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$ac > \min\left\{\frac{b}{d}, \frac{d}{b}\right\}, \quad bd > \min\left\{\frac{a}{c}, \frac{c}{a}\right\}.$$

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса BL и высота BK. Прямые BL и BK пересекают вторично описанную окружность треугольника ABC в точках W и T соответственно. Оказалось, что $BC = BW$. Докажите, что $TL \perp BC$.

3. Пусть n — некоторое d-значное (то есть имеющее d цифр в десятичной записи) натуральное число, не делящееся на 10. Выписав цифры числа n в обратном порядке, получили число n'. Может ли десятичная запись произведения nn' состоять только из цифр «8», если **(a)** $d = 9998$; **(b)** $d = 9999$?

4. Яша записывает в клетки таблицы 99×99 все натуральные числа от 1 до 99^2 (каждое число по разу). Гриша смотрит на таблицу, выбирает несколько клеток, среди которых нет двух клеток, имеющих общую сторону, а затем считает сумму чисел во всех выбранных клетках. Какую наибольшую сумму гарантированно может обеспечить Гриша?