IX Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 2

Д. К. Мамий

П. А. Кожевников

Д. А. Белов

Е. В. Бакаев

Л. А. Емельянов

М. Сагафиян

К. А. Сухов

11–16 марта 2024 г.

г. Майкоп

Республика Адыгея

1. Юниоры **13 марта**

5. Саша вычислил значение выражения $n^2 + n + 1$ для всех целых чисел от 1 до 100. Марина вычислила значение выражения $n^2 - n + 1$ для этих же чисел. У кого из них произведение вычисленных значений больше и во сколько раз?

Александр Антропов

Ответ. У Саши больше в 10101 раз.

Решение. Подставим вместо n число $n + 1$ в выражение Марины. Получится $(n + 1)^2 - (n + 1) + 1 = n^2 + n + 1$. Таким образом, значения выражения Саши для $1, 2, \ldots 99$ будут совпадать со значениями выражения Марины для $2, 3, \ldots, 100$ соответственно.

Произведения будут отличаться только из-за того, что Саша подставляет $n = 100$, получая $100^2 + 100 + 1 = 10101$ (и такого значения у Марины не будет), а Марина подставляет $n = 1$, получая $1^2-1+1 = 1$ (и такого значения не будет у Саши). Значит, произведение Саши будет больше в 10101 раз.

6. В клетках доски $8 \times 40\,000$ (8 строчек, 40 000 столбцов) расставлены целые числа от 1 до 320 000, каждое по одному разу. Докажите, что можно переставить строчки таблицы так, чтобы в каждом столбце числа не стояли в порядке возрастания, если смотреть сверху вниз.

Александр Антропов

Решение. Всего существует $8! = 40\,320$ способов переставить местами строчки таблицы. Если ни один из этих способов не подходит, то для каждого способа есть столбец, числа в котором будут идти в порядке возрастания. При этом каждый столбец может «запрещать» только одну перестановку строк. Таким образом, если запрещены все 8! перестановок, то столбцов хотя бы 40 320, что не так. Получается, что хотя бы одна из перестановок строк удовлетворяет условию задачи.

7. По кругу расставлены положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ в указанном порядке по часовой стрелке. Пусть A_i — среднее арифметическое числа a_i и нескольких (возможно, одного) следующих за ним по часовой стрелке. Докажите, что наибольшее из чисел $A_1, A_2, \ldots, A_{2024}$ не меньше среднего арифметического всех чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$.

Кирилл Сухов

Решение. Будем называть набор чисел, входящих в A_i, *i-ой колбаской.* Тогда у нас есть набор из 2024 колбасок, причём для каждого a_i есть колбаска, начинающаяся в a_i. В колбасной терминологии нам нужно доказать, что среднее арифметическое чисел в какой-то колбаске не меньше среднего арифметического всех 2024 чисел, стоящих по кругу.

Запустим следующий процесс. Начнём с первой колбаски и подчеркнём все числа, входящие в эту колбаску, двигаясь по часовой стрелке. Пусть первая колбаска заканчивается числом a_x. Далее подчеркнём все числа $(x+1)$-й колбаски, также двигаясь по часовой стрелке, и т. д. Если какое-то число было подчёркнуто ранее, мы его подчёркиваем ещё раз (таким образом, каждое число подчёркнуто столько раз, в сколько рассмотренных колбасок оно входит).

Рассмотрев 2025 шагов данного процесса, мы получим, что после каких-то двух шагов мы останавливались на одном и том же числе. Это означает, что у нас есть набор из нескольких колбасок, в который все a_i входят одинаковое количество раз.

Обозначим средние арифметические в этих колбасках как $S_1, S_2, \ldots, S_k$, а количества чисел в них как $t_1, t_2, \ldots, t_k$. С одной стороны, сумма всех чисел в колбасках равна

$$S_1 \cdot t_1 + S_2 \cdot t_2 + \ldots + S_k \cdot t_k.$$

С другой стороны, все числа в колбаски входят одинаковое количество раз, а именно по $\frac{t_1+t_2+\ldots+t_k}{2024}$ раз. Поэтому сумма чисел в колбасках равна

$$\frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_k}{2024} \cdot 2024a,$$

где a — среднее арифметическое всех чисел, стоящих по кругу.

Мы получили равенство

$$S_1 \cdot t_1 + S_2 \cdot t_2 + \ldots + S_k \cdot t_k = (t_1 + t_2 + \ldots + t_k) \cdot a.$$

Если бы все S_i были меньше a, то левая часть была бы меньше правой. Значит, какое-то из S_i не меньше a, то есть среднее арифметическое в некоторой колбаске не меньше среднего арифметического всех чисел, стоящих по кругу, что и требовалось.

8. Внутри треугольника ABC со стороной $BC = 6$ расположены две равные окружности радиуса 1, которые касаются друг друга, одна вписана в угол B, другая вписана в угол C.

(a) Докажите, что точка M пересечения медиан треугольника ABC не лежит внутри ни одной из данных окружностей.

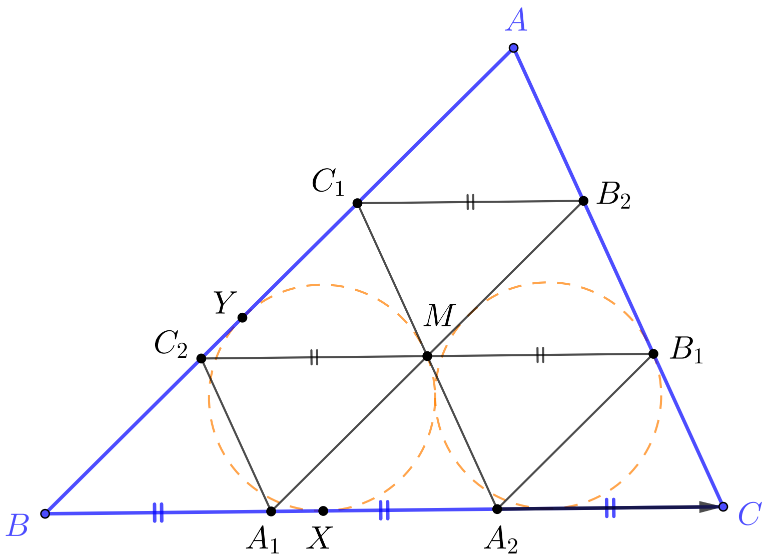
(b) Докажите, что если M лежит на одной из окружностей, то треугольник ABC равнобедренный.

Егор Бакаев

Решение.

Мы будем использовать следующее известное описание точки M. Пусть треугольник разбит прямыми, параллельными сторонам, на 9 равных треугольников (см. рис.). Тогда единственный узел разбиения, находящийся внутри треугольника ABC, — это M. (Это описание несложно вывести из того, что медианы делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины.)

Договоримся считать направление BC горизонтальным, так что окружности получаются друг из друга сдвигом на 2 по горизонтали.



(a) Прямая AC касается правой окружности. Прямая C_1A_2 получается из нее сдвигом на 2 влево, значит она касается левой окружности (иначе говоря, левая окружность — вписанная в треугольник BC_1A_2). Тем самым, ни одна точка прямой C_1A_2 не лежит внутри левой окружности. В частности, M не лежит внутри левой окружности. Аналогично, она не лежит внутри правой окружности.

(b) Еще раз используя, что C_1A_2 касается левой окружности, понимаем, что M лежит на левой окружности только в случае, если M — точка касания. Итак, пусть левая окружность (вписанная в треугольник BC_1A_2) касается его сторон C_1A_2, BA_2, BC_1 в точках M, X, Y соответственно. Мы знаем (из разбиения на 9 равных треугольников), что $MA_2 = MC_1$. Тогда из равенств соответствующих отрезков касательных имеем

$$BC_1 = BY + YC_1 = BY + C_1M = BX + A_2M = BX + A_2X = BA_2.$$

Получили, что треугольник BC_1A_2 равнобедренный: $BC_1 = BA_2$. Тогда и ABC равнобедренный:

$$BA = \frac{3BC_1}{2} = \frac{3BA_2}{2} = BC.$$

Замечание. Пункт а) можно доказать и другим рассуждением. Предположим, что M лежит внутри правой окружности. Так как C_1 получается из M сдвигом на 2 влево, то M должна оказаться внутри левой окружности — противоречие.

Отметим, что это рассуждение работает и в более общей ситуации: можно заменить два условия «$BC = 6$ и M — точка пересечения медиан» на одно условие «M — середина отрезка длины 4, параллельного BC, концы которого лежат на сторонах AB и AC».

2. Сеньоры 13 марта

5. Даны вещественные числа a, b, c. На координатной плоскости провели три прямые, заданные уравнениями $y = ax+b$, $y = bx+c$, $y = cx+a$. Известно, что две из них пересекаются в точке, абсцисса которой равна 1. Докажите, что тогда третья прямая проходит через некоторую точку, у которой обе координаты являются целыми числами.

Назар Агаханов

Решение. Для определенности, пусть третья прямая — это $y = cx + a$. Из условия следует, что при подстановке $x = 1$ в правые части уравнений первых двух прямых получаются одинаковые значения y, то есть $a \cdot 1 + b = b \cdot 1 + c$, откуда $a = c$.

Тогда видим, что $c \cdot (-1) + a = 0$. Это равенство означает, что третья прямая проходит через точку $(-1, 0)$.

6. Кимия взяла натуральные числа a и b, а затем выписала в строку в некотором порядке натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, 2024$ так, чтобы для любой пары соседних чисел оказалось выполнено хотя бы одно из двух условий:
(1) их сумма равна a;
(2) их разность (при вычитании из большего числа меньшего) равна b.

Найдите все возможные значения b.

Morteza Saghafian

Ответ. 1, 2.

Решение.

Для $b = 1$ работает пример: 1, 2, 3, …, 2024. Для $b = 2$: 1, 3, 5, …, 2023, 2, 4, 6, …, 2024 (при этом $a = 2023 + 2$).

Предположим, что x_1, x_2, …, x_n (где $n = 2024$) — перестановка чисел 1, 2, …, 2024, удовлетворяющая условию. Покажем, что среди чисел x_i встретится не более двух остатков при делении на b. Отсюда будет следовать, что при $b \geqslant 3$ в строчке не могут присутствовать одновременно числа 1, 2, 3, то есть нужных примеров при $b \geqslant 3$ не существует.

Заметим, что если $x_i \equiv r \pmod b$, то либо $x_{i+1} \equiv r \pmod b$ (в случае $|x_i - x_{i+1}| = b$), либо $x_{i+1} \equiv (a - r) \pmod b$ (в случае $x_i + x_{i+1} = a$). И аналогично, если $x_i \equiv a - r \pmod b$, то либо $x_{i+1} \equiv a - r \pmod b$ (в случае $|x_i - x_{i+1}| = b$), либо $x_{i+1} \equiv r \pmod b$ (в случае $x_i + x_{i+1} = a$). Последовательно применяя это соображение для $i = 1, 2, \ldots$, понимаем, что в самом деле среди чисел x_i встретится не более двух остатков при делении на b.

7. Конечное множество A вещественных чисел назовем *значимым*, если для любых двух различных чисел из A можно подобрать третье число из A так, чтобы одно из этих трех чисел было равно среднему арифметическому двух других. При каком наибольшем n существует значимое множество, состоящее из n чисел?

Morteza Saghafian

Ответ. 5.

Решение. Пример: $A = \{0, 2, 3, 4, 6\}$. Легко проверить, что условие значимости выполняется.

Предположим, есть значимое множество A, такое что $n = |A| > 5$. Не умаляя общности можно считать, что 1 и -1 — это наибольшее и наименьшее числа из A (к этой ситуации можно прийти, выбрав на числовой прямой новое начало отсчета и единичный отрезок; ясно, что условие задачи от этого не поменяется). Таким образом, все числа множества A лежат на отрезке $[-1, 1]$.

Далее, пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ — все числа множества A из интервала $(-1, 0)$, аналогично, пусть $b_1 < b_2 < \ldots < b_l$ — все числа множества A из интервала $(0, 1)$. Применив условие к числам -1 и b_i, получаем, что число $b_i' = \frac{-1+b_i}{2}$ лежит в A, поскольку два других возможных числа находятся вне $[-1, 1]$ (в самом деле, $2b_i - (-1) > 1$ и $2 \cdot (-1) - b_i < -1$). При этом $b_1' < b_2' < \ldots < b_l'$ — различные числа из интервала $(-1, 0)$. Значит, каждое b_i' должно совпадать с каким-то a_j, при этом последовательно получаем, что $b_1' \geqslant a_1$, $b_2' \geqslant a_2$, …, $b_l' \geqslant a_l$, в частности, видим, что $l \geqslant k$. Аналогично, применив условие к числам a_i и 1, получаем, что $a_i' = \frac{a_i+1}{2} \in A$. При этом

$a'_1 < a'_2 < \ldots < a'_l$ — числа из интервала $(0, 1)$, совпадающие с какими-то b_j. Последовательно получаем, что $a'_1 \geqslant b_1$, $a'_2 \geqslant b_2$, $\ldots$, $a'_k \geqslant b_k$, в частности, видим, что $k \geqslant l$.

Сравнивая два вывода, получаем, что обязательно $k = l$ и все полученные неравенства должны обращаться в равенства: $b'_i = a_i$ и $a'_i = b_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Подстваляя выражения для b'_i и a'_i, получаем систему уравнений относительно a_i и b_i: $\frac{-1+b_i}{2} = a_i$, $\frac{a_i+1}{2} = b_i$. Решая эту систему, получаем, что $a_i = -\frac{1}{3}$, $b_i = \frac{1}{3}$. Значит, никакие числа интервалов $(-1, 0)$ и $(0, 1)$, за исключением точек $\pm\frac{1}{3}$, не могут принадлежать множеству A. Следовательно, $S \subset \left\{-1, 1, 0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$, и значит $|A| \leqslant 5$.

Замечание. Предложим другой возможный путь доказательства оценки. Снова пусть $-1, 1 \in A$, причем -1 и 1 — это минимальное и максимальное числа из A. Предположим, что в множестве A есть число x, отличное от $\pm 1, 0, \pm\frac{1}{3}$. Не умаляя общности, пусть $x > 0$, положим $x = \frac{1}{3} + d$. Применяя условие к -1 и x, получаем, что

$$y = \frac{-1 + x}{2} = \frac{-1}{3} + \frac{d}{2} \in A,$$

при этом $y \in (-1, 0)$. Затем применяя условие к y и 1, получаем, что

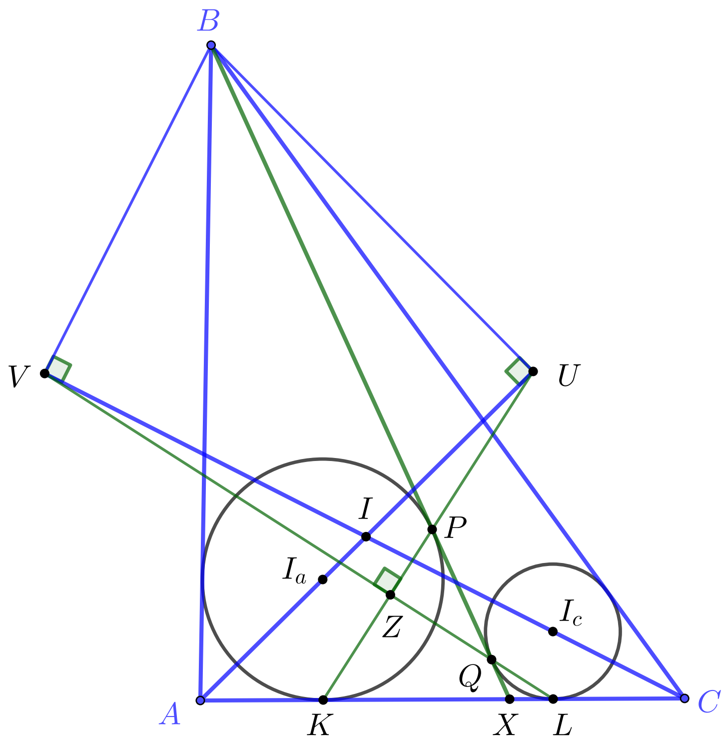
$$z = \frac{y + 1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{d}{4} \in A.$$

Мы видим, что z так же, как и x, лежит в интервале $(0, 1)$ и не равен $\frac{1}{3}$. Но z находится ближе к $\frac{1}{3}$, чем x. Продолжая так далее, мы получим бесконечнйю последовательность чисел из A. Противоречие. (Противоречие можно получить и сразу на первом шаге, если выбрать $x \in A \cap (0, 1)$, не равное $\frac{1}{3}$ и ближайшее к $\frac{1}{3}$ среди таких чисел.)

8. Дан треугольник ABC. На отрезке AC выбирается произвольная точка X. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABX, касается отрезков AX и BX соответственно в точках K и P, а окружность, вписанная в треугольник CBX, касается отрезков CX и BX соответственно в точках L и Q. Найдите геометрическое место точек пересечения прямых KP и LQ.

Лев Емельянов

Решение. Пусть I, I_a, I_c — центры вписанных окружностей треугольников ABC, ABX, CBX соответственно. Пусть U и V — проекции B на биссектрисы AI и CI углов BAC и BCA соответственно (см. рис.)



Лемма. KP проходит через U.

Доказательство. Пусть расположение точек соответствует рисунку (при другом расположении рассуждения аналогичны). Так как $I_aU \perp BU$ и $I_aP \perp BP$, точки I_a, B, P, U лежат на одной окружности. Отсюда $\angle I_aPU = 180^\circ - \angle I_aBU$, при этом

$$\angle I_aBU = 90^\circ - \angle BI_aU = \angle AI_aB - 90^\circ = \frac{1}{2}\angle AXB = \angle I_aPK.$$

Итак, счет углов дает $\angle I_aPK + \angle I_aPU = 180^\circ$, откуда и следует, что K, P, U лежат на одной прямой, тем самым лемма доказана. (На самом деле, это известное утверждение из геометрии треугольника, которое иногда называют «задача 255 из задачника Шарыгина».)

Итак, KP проходит через U и аналогично, LQ проходит через V. Кроме того, прямая KP перпендикулярна LQ, поскольку KP и LQ перепендикулярны биссектрисам смежных углов AXB и CXB. Отсюда следует, что $Z = KP \cap LQ = KU \cap LV$ лежит на окружности ω, построенной на (фиксированном) отрезке UV как на диаметре.

Уточним положение Z, пользуясь расположением точек. Заметим, что U лежит на продолжении отрезка AI за точку I, так как $\angle AIB > 90^\circ$. Тогда прямая UK пересекает стороны AC и CI в треугольнике ACI. Аналогично, прямая VL пересекает стороны AC и AI в треугольнике ACI. А так как точки A, K, L, C следуют на прямой AC именно в таком порядке, то $Z = KU \cap LV$ лежит внутри угла AIC (и даже внутри треугольника AIC).

Так как точка I лежит внутри ω (ведь $\angle UIV > 90^\circ$), то угол AIC высекает на окружности ω дугу; мы поняли, что на этой дуге и лежит Z.

Несложно понять, что наоборот, любая точка Z', лежащая на указанной дуге, удовлетворяет условию. Заметим, что при непрерывном движении X от A к C вектор $\vec{IZ}$ непрерывно меняет направление от $\vec{IA}$ до $\vec{IC}$, при этом, как мы показали ранее, Z будет находиться внутри угла AIC. Значит, в какой-то момент $\vec{IZ}$ и $\vec{IZ'}$ станут сонаправленными, следовательно, в этот момент точки Z и Z' совпадут (каждая из них является точкой пересечения луча IZ' с ω.)

Замечание. Имеются и другие подходы к решению. В частности, может быть использованы следующие соображение.

Пусть T — точка касания AC со вписанной окружностью. Пусть TZ пересекает BX в точке V. Про точку V можно доказать следующие утверждения: Z — середина VT; $BV = const$. Из этих утвреждений сразу следует, что V движется по окружности с центром B, а значит (гомотетия с центром T коэффициентом $1/2$) Z движествя по окружности (с центром в середине BT).

Также можно показать, что V лежит на общей касательной к окружностям, вписанным в треугольники ABX и CBX. (Это эквивалентно тому, что Z лежит на линии центров I_aI_c).

Замечание. Приведем еще одно замечание. Известно, что точки I_a и I_c движутся по отрезкам AI и IC так, что $\angle I_aTI_c = 90^\circ$, где T — фиксированная точка — точка касания вписанной окружности треугольника ABC с AC. Тогда I_aI_c касается коники с фокусом T (эта коника — гипербола, касающейся AI и IC в точках A и C). При этом Z будет проекцией T на I_aI_c. Тем самым наша задача оказывается связанной с известным вопросом о нахождении множества проекций фокуса коники на ее касательные. Ответом для эллипса и гиперболы будет окружность, касающаяся коники, с центром в центре коники; для параболы — касательная, проведенная в вершине параболы.