

IX Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 11–16 марта 2024 года



Юниоры. Второй день
13 марта

5. Саша вычислил значение выражения $n^2 + n + 1$ для всех целых чисел от 1 до 100. Марина вычислила значение выражения $n^2 - n + 1$ для этих же чисел. У кого из них произведение вычисленных значений больше и во сколько раз?

6. В клетках доски $8 \times 40\,000$ (8 строчек, 40 000 столбцов) расставлены целые числа от 1 до 320 000, каждое по одному разу. Докажите, что можно переставить строчки таблицы так, чтобы в каждом столбце числа не стояли в порядке возрастания, если смотреть сверху вниз.

7. По кругу расставлены положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$ в указанном порядке по часовой стрелке. Пусть A_i — среднее арифметическое числа a_i и нескольких (возможно, одного) следующих за ним по часовой стрелке. Докажите, что наибольшее из чисел $A_1, A_2, \dots, A_{2024}$ не меньше среднего арифметического всех чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$.

8. Внутри треугольника ABC со стороной $BC = 6$ расположены две равные окружности радиуса 1, которые касаются друг друга, одна вписана в угол B , другая вписана в угол C .

(a) Докажите, что точка M пересечения медиан треугольника ABC не лежит внутри ни одной из данных окружностей.

(b) Докажите, что если M лежит на одной из окружностей, то треугольник ABC равнобедренный.

IX Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 11–16 марта 2024 года



Сеньоры. Второй день
13 марта

5. Даны вещественные числа a , b , c . На координатной плоскости провели три прямые, заданные уравнениями $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$. Известно, что две из них пересекаются в точке, абсцисса которой равна 1. Докажите, что тогда третья прямая проходит через некоторую точку, у которой обе координаты являются целыми числами.

6. Кимия взяла натуральные числа a и b , а затем выписала в строку в некотором порядке натуральные числа $1, 2, 3, \dots, 2024$ так, чтобы для любой пары соседних чисел оказалось выполнено хотя бы одно из двух условий:

(1) их сумма равна a ;

(2) их разность (при вычитании из большего числа меньшего) равна b .

Найдите все возможные значения b .

7. Конечное множество A вещественных чисел назовем *значимым*, если для любых двух различных чисел из A можно подобрать третье число из A так, чтобы одно из этих трех чисел было равно среднему арифметическому двух других. При каком наибольшем n существует значимое множество, состоящее из n чисел?

8. Дан треугольник ABC . На отрезке AC выбирается произвольная точка X . Пусть окружность, вписанная в треугольник ABX , касается отрезков AX и BX соответственно в точках K и P , а окружность, вписанная в треугольник CBX , касается отрезков CX и BX соответственно в точках L и Q . Найдите геометрическое место точек пересечения прямых KP и LQ .